第七章 磁异常的反演

第一节 磁异常反演的基本问题

已知磁场的空间分布特征来确定地下所对应的场源体特征，如确定磁性体的赋存空间位置、形状、产状及磁化强度的大小和方向等。通常称为磁异常的反演问题。

磁异常反演过程分为定性、半定量解释和定量解释两个阶段，这两者是互相关联，互相辅助的。只有在通过正确的定性及半定量解释取得初步对磁性体形状、产状、及其所引起的地质原因进行判断之后，才能合理地选用定量计算的公式和方法，以便进一步得到更完善的解释结果。在磁异常解释中存在以下两个较为普遍的问题：

（1）场源体非均匀磁性问题

在自然界中因场源所处的地质、地球物理环境不同，其非均匀磁性是较普遍的现象。通常对具有一定埋深的场源在反演解释过程中假设其为均匀磁化。

（2）反演的多解性问题

多解性问题是地球物理反演解释中普遍存在的问题。为了避免或减少磁异常反演的多解性问题，必须充分利用地质及其它地球物理资料进行综合推断解释。

第二节 几种简单的反演方法

一、特征点法

利用磁异常曲线上一些特征值，如极大值、半极值、1/4 极值，拐点，零值点及极小值等坐标位置和坐标之间的距离，求解磁源体参量的方法称为特征点法。其实质就是求解出不同形状磁性体磁场解析式的特征点与该形体参量间的关系式，然后由异常曲线上读取各个特征值代入相应关系式求得反演结果。下面列举两个典型形体说明其方法原理和计算公式。

（一）球体

已知斜磁化球体的 Z_a 表达式为

$$Z_a = \frac{\mu_0 m_s}{4\pi(x^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2)\sin i_s - 3Rx\cos i_s]$$

令 $\frac{\partial Z_a}{\partial x}=0$，则有三个根对应其极值横坐标，其中极大值坐标 $x_{\max}$ 和一个明显的极小值坐标 $x_{\min}$ 之间的距离 d_m 为

$$d_m = x_{\min} - x_{\max} = \frac{1}{f}\cdot R$$

则有：$R = f \cdot d_m$

式中

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{(4\sin\frac{\varphi}{3}\sqrt{1+\frac{4}{3}\boldsymbol{ctg}^2\boldsymbol{i}_s})} \qquad (7\text{-}2\text{-}1)$$

$$\varphi = \arccos[(\frac{64}{27}ctg^3 i_s + \frac{13}{6}ctgi_s)(\frac{4}{3}+\frac{16}{9}ctg^2 i_s)^{-3/2}]$$

将极值点坐标 $x_{\max}$ 代入 Z_a 表达式中，有

$$Z_{a\max} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m_s}{R^3}\phi(i_s)$$

可求得截面磁矩 m_s

$$m_s = \frac{2\pi R^3 Z_{a\max}}{\mu_0\phi(i_s)} \qquad (7\text{-}2\text{-}2)$$

若令 $K = \frac{|Z_{a\min}|}{Z_{a\max}}$，这时 K 与 f 、$\phi(i_s)$ 均为 i_s 角的函数值，根据它们的函数关系式可以做出表（7-2-1）。解反演问题时，由实测异常曲线上取得 d_m 和极值比 K，并由 K 值在表中查得 i_s， f 及 ϕ 值，分别代入式（7-2-1）和（7-2-2）解得 R 和 m_s：若已知截面磁化强度 M_s，则又可求得球的中心剖面内最大截面积 S，进一步可解得球体的体积。

当 $i_s > 60^\circ$ 时，也可利用零值点特征线段来求解，其计算公式为

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}[p\cdot q - 0.11(p-q)^2]^{1/2} \qquad (7\text{-}2\text{-}3)$$

式中 p,q 分别为异常极大值对应的横坐标点至两侧零值点坐标间的特征线段。利用式（7-2-3）求得 $x_{\max}$ 长度后，由极大值对应的横坐标点间极小值一侧取 $x_{\max}$ 的长度便定出原点位置。也可用 $T_{a\max}$ 所对应的横坐标确定原点（即球心在地面上投影点的位置）。

表 7-2-1 K 与 f 、φ 与 i_s 角的函数关系

i_s	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
K	1.00	0.53	0.29	0.15	0.10	0.04	0.02
f	1.00	0.98	0.92	0.83	0.72	0.61	0.50
φ	0.43	0.56	0.70	0.82	0.92	0.98	1.00

（二）无限延深厚板

斜磁化无限延深厚板的磁场表达式由一个偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $\varphi(x)$ 组成，而奇偶函数恰是顺层磁化时的 $H_{a//}$ 和 $Z_{a//}$。因此，利用奇偶函数的性质将斜交磁化厚板的 Z_a 曲线分解为 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 之后，应用 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 曲线来进行反演。

已知斜磁化厚板 Z_a 表达式组成为

$$Z_a = Z_{a//}\cos\gamma + H_{a//}\sin\gamma = f(x) + \varphi(x) \qquad (7\text{-}2\text{-}4)$$

γ 为磁化特征角。利用奇偶函数性质有

$$Z_a(x) = f(x) + \varphi(x) \qquad Z_a(-x) = f(x) - \varphi(x) \qquad (7\text{-}2\text{-}5)$$

故有：

$$f(x) = \frac{1}{2}[Z_a(x) + Z_a(-x)] \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}[Z_a(x) - Z_a(-x)] \qquad (7\text{-}2\text{-}6)$$

若要根据式（7-2-6）实现 Z_a 曲线分解，首先要确定原点，令 $\frac{\partial Z_a}{\partial x} = 0$，则可解得

$$\begin{aligned} x_{\max} &= h\cdot ctg\gamma - \sqrt{(h\cdot\csc\gamma)^2 + b^2} \\ x_{\min} &= hctg\gamma + \sqrt{(h\cdot\csc\gamma)^2 + b^2} \end{aligned} \qquad (7\text{-}2\text{-}7)$$

利用磁异常的极大值与极小值之代数和所确定的原点必在这两个极值之间，计算公式为

$$Z_a(0) = \frac{\mu_0}{2\pi}M_s\sin a\cos\gamma tg^{-1}\frac{2bh}{h^2 - b^2} = Z_{a\max} + Z_{a\min} \qquad (7\text{-}2\text{-}8)$$

当确定了原点之后，便可对称地取 $Z_a(x)$ 和 $Z_a(-x)$，代入式（7-2-6）求得 Z_a 曲线的半差曲线 $\varphi(x)$ 及半和曲线 $f(x)$，且两者分别与顺层磁化的 $H_{a//}$ 及 $Z_{a//}$ 曲线形态特征完全相同，仅幅值差 $\sin\gamma$ 倍和 $\cos\gamma$ 倍，所以斜磁化厚板求解反问题完全可用分解后的 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 曲线来实现。

利用 $f(x)$ 曲线求解；由式（7-2-8）知道 $f(x)$ 曲线的极大值 $f(x)_{\max}$ 为

$$f(x)_{\max} = \frac{\mu_0}{\pi}M_s\sin a\cdot\cos\gamma tg^{-1}\frac{b}{h} = Z_a(0) \qquad (7\text{-}2\text{-}9)$$

于是利用顺层磁化无限延深厚板的 $Z_{a//}$ 表达式可以得到其半极值及1/4极值点所对应的横坐标特征线段 $d_{1/2}$ 及 $d_{1/4}$，见图 7-2-1。由此解得上顶中心埋深及厚板宽度 $2b$，计算公式

为

$$h=\frac{d_{1/4}^2-d_{1/2}^2}{4d_{1/2}},\qquad 2b=\sqrt{d_{1/2}^2-4h^2} \tag{7-2-10}$$

若令$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 Z_{a//}}{\partial x^2}=0$，则得拐点坐标$x_G$为

$$x_G^2=\frac{1}{3}(b^2-h^2+2\sqrt{b^4+h^4+b^2h^2})$$

当$b=h$时，

$$x_G=1.1b \tag{7-2-11}$$

当$b>>h$时，$x_G=b$

由式（7-2-7）可知，利用原曲线极值间线段d_m可求磁化特征角γ

$$csc^2\gamma=\frac{1}{4h^2}\left(d_m^2-4b^2\right) \tag{7-2-12}$$

若已知M_s或a角其中的一个，则利用式（7-2-12）便可确定另一个量。对于顺层磁化厚板的$Z_{a//}$曲线解反演问题仍可利用上述计算公式，并可利用拐点来圈定其厚板的上顶边界。

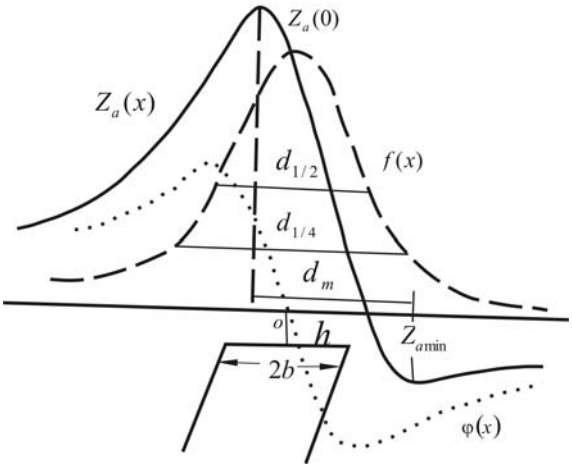


图 7-2-1 厚板状体 Za 异常曲线分解及特征线段

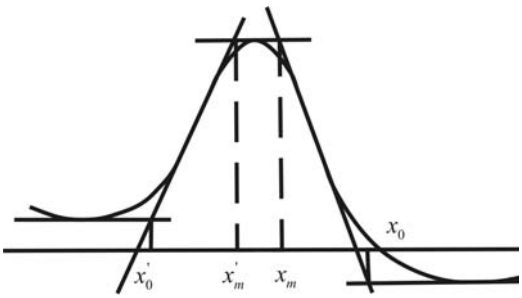


图 7-2-2 经验切线法

二、切线法

切线法是利用过异常曲线上的一些特征点（如极值点，拐点）的切线之间的交点坐标间的关系来计算磁性体产状要素的方法。该方法简便、快速、受正常场选择影响小，在航磁ΔT异常的定量解释中曾得到广泛应用。

（一）经验切线法

经验切线法是最早的一种切线法，如图 7-2-2 所示，过Z_a曲线极大值两侧拐点作两条

切线，它们与过极值点的切线（若无极小值时，用 x 坐标轴替代过极小值的切线）有四个交点，其坐标分别为 x_0 、 $x_0^{'}$ 和 x_m， $x_m^{'}$，则求埋深的经验公式为

$$h=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(x_0-x_m)+\frac{1}{2}(x_m^{'}-x_0^{'})] \qquad (7\text{-}2\text{-}13)$$

用理论曲线进行实际计算结果表明：经验切线法对顺层磁化无限延深的板状体(当 $b=h$ 时)，垂直磁化有限延深直立板状体（当 $b=h,2l<h$ 时）一般能获得较好的效果。而对三度体及其它二度体效果较差，为了提高切线法的计算精度，并能利用多参量求解，人们提出了针对各种形体和斜磁化条件下的带校正系数的切线法。

（二）斜磁化二度无限延深板状体的 ΔT 异常切线法

由二度板状体规格化公式知道

$$\Delta T=\frac{\sin I}{\sin i_s}(Z_{a//}\cos\theta+H_{a//}\sin\theta) \qquad (7\text{-}2\text{-}14)$$

为了讨论方便，可不考虑系数 $\frac{\sin I}{\sin i_s}$，因为它不改变异常的形态特征，仅影响其强度，故在计算磁化强度时才加以考虑，则上式可简写为

$$\Delta T=Z_{a//}\cos\theta+H_{a//}\sin\theta \qquad (7\text{-}2\text{-}15)$$

分别求出对 x 的一次，二次导数

$$\begin{aligned}\Delta T_x&=f_x\cos\theta+\varphi_x\sin\theta\\ \Delta T_{xx}&=f_{xx}\cos\theta+\varphi_{xx}\sin\theta\end{aligned} \qquad (7\text{-}2\text{-}16)$$

式中 f_x， f_{xx} 及 φ_x， φ_{xx} 分别为 $Z_{a//}$ 和 $H_{a//}$ 的一阶，二阶水平偏导数，若令 $\Delta T_x=0$，则可得 ΔT 曲线的极值点横坐标 $x_{\max}$ 及 $x_{\min}$；若令 $\Delta T_{xx}=0$，又可得其拐点的横坐标 x_{G4}，x_{G1}。进而还可得出极值 $\Delta T_{\max}$， $\Delta T_{\min}$ 及拐点处的场值 ΔT_{G4}， ΔT_{G1}，过拐点处切线 L_1,L_2 的斜率 $(\Delta T_x)_{G4m},(\Delta T_x)_{G1m}$，以及特征线段 x_0， x_{04}， x_{m1} 和 x_{m4} 等 14 个基本参数，见图 7-2-3。

为了求得地质体的埋深，宽度和磁化强度，对这 14 个参数可以有多种组合。合理选择两类组合，一类是以角参量 θ 为主的组合；另一类是以拐点为主的组合。这些组合均有严格的数学关系式，经计算，编出求磁化强度时的系数列线图 7-2-4（或系数表）以便进行切线法反演计算。

ΔT 异常的切线法解反演问题可分为两种具体方法，一是 θ 角法，另一个是拐点法，现将拐点法计算步骤介绍如下：

1） 由实测 ΔT 曲线上取 $\frac{x_{G4}-x_{\max}}{x_{G1}-x_{\max}}$ 的比值；

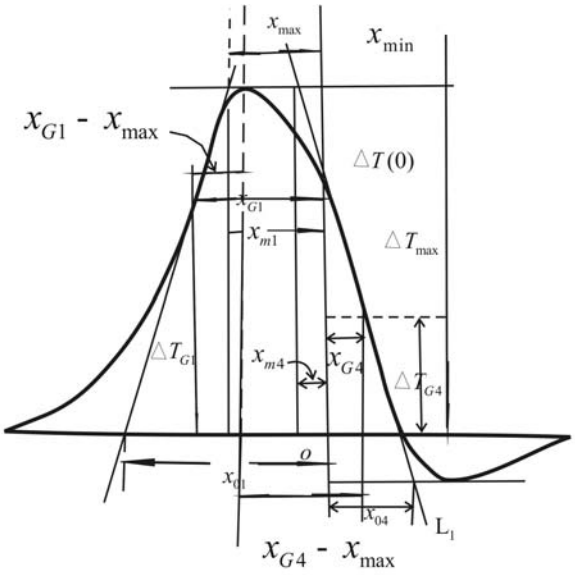
2） 根据此比值查列线图 7-2-4，确定系数 K_h、K_b 和 K_M 的值；

3） 按下式求得 h，b 和 M_s

$$h=\frac{x_{G4}-x_{G1}}{K_h}、\ b=\frac{x_{G4}-x_{G1}}{K_b}$$

$$M_s=\frac{\Delta T_{\max}-\Delta T_{G4}}{K_M} \qquad (7\text{-}2\text{-}17)$$

由图 7-2-3 和式（7-2-17）可见，本方法与正常场选择无关，也不需要确定原点，只要两拐点附近曲线未受干扰即可。角参量 $\theta\geq 60^{\circ}$ 时，均能获得较好的解释效果。且对 Z_a 异常求解 h 和 b 也适用。



7-2-3 切线法特征线段

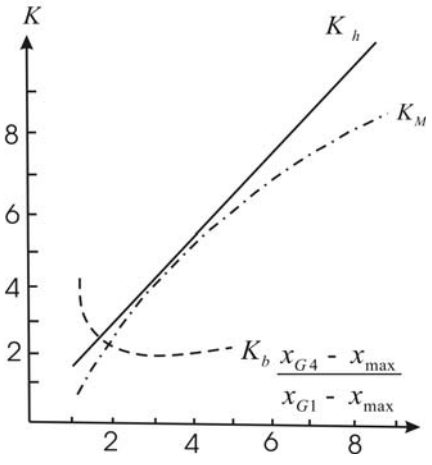


图 7-2-4 拐点法参量列线图

第三节 沃纳（Werner）反褶积方法

从大量的磁测资料来确定磁性基底、磁性岩体及其构造边界，如切线法等一类人工解释方法往往工作量大，而且带有主观性。Hartman，Tesky，Friedberg 等人对 S.沃纳 1953 年提出的一种快速反演方法进行推广，该方法利用总磁场强度异常及其水平梯度异常剖面，反演解释下延无限的直立或倾斜薄板、接触带。它以简单薄岩墙模型为基础，把复杂的非线性反演问题线性化，其做法是对简单模型的公式进行变形和简化，建立线性方程组来求解含有 7 个或 4 个未知的中间变量，再由这些中间变量来获得模型体的水平位置、上顶埋深，磁化强度的大小及方向等一系列参数。沃纳（Werner）反褶积方法一个重要的优点是解释人员不必预先知道待反演解释模型的形态及磁性参数。

一、方法原理

已知直立无限延深薄脉磁异常 Z_a、H_a 和 ΔT 的表达式为

$$\begin{cases} Z_a = \dfrac{\mu_0 \square 2b}{4\pi} \dfrac{M_z h - M_x x}{x^2 + h^2} \\ H_a = -\dfrac{\mu_0 \square 2b}{4\pi} \dfrac{M_x - M_z x}{x^2 + h^2} \end{cases}$$

$$\Delta T = \frac{Ax + Bh}{x^2 + h^2} \tag{7-3-1}$$

$$A = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2b(M_x \sin I + M_z \sin\alpha), B = \frac{\mu_0}{4\pi} 2b(-M_x \cos I \sin\alpha + M_z \sin I) \tag{7-3-2}$$

式中：b 为脉宽；h 为薄脉埋深；M_x 为磁化强度 M 的 x 分量；M_z 为 M 的 z 分量；I 为正常地磁倾角；α 为薄脉走向与磁北夹角。解式（7-3-2）可得：

$$M_x = \frac{-BP - AQ}{2b(P^2 + Q^2)}, M_z = \frac{-AP + BQ}{2b(P^2 + Q^2)} \tag{7-3-3}$$

其中 $P = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \cos I \sin\alpha; Q = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \sin I$

若坐标原点有任意横坐标 x_0，则式（7-3-1）可改写为

$$\Delta T = \frac{A(x - x_0) + Bh}{(x - x_0)^2 + h^2}$$

经运算后可得：

$$a_0 + a_1 x + b_0 \Delta T + b_1 x \Delta T = x^2 \Delta T \tag{7-3-4}$$

式中：$a_0 = -Ax_0 + Bh, a_1 = A, b_0 = -x_0^2 - h^2, b_1 = 2x_0$

若有一个等间隔的四点 Werner 算子，选其中第二点作为参考点，则有：

$$\Delta T_1 = \Delta T(x - \Delta x, 0), \Delta T_2 = \Delta T(x, 0), \Delta T_3 = \Delta T(x + \Delta x, 0), \Delta T_4 = \Delta T(x + 2\Delta x, 0)$$

其中：x 是算子第二点的横坐标，Δx 是算子中相邻两点的距离。若 $\Delta T_1, \cdots, \Delta T_4$ 分别代入式（7-3-4），可得一个含有 4 个未知数的线性方程组，则有关系式：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \Delta T_1 & -\Delta T_1 \\ 1 & 0 & \Delta T_2 & 0 \\ 1 & 1 & \Delta T_3 & -\Delta T_3 \\ 1 & 2 & \Delta T_4 & -2\Delta T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ 0 \\ \Delta T_3 \\ 4\Delta T_4 \end{bmatrix}$$

由于以第二点为参考点，且 Δx 为一个单位，故上式无长度量纲。式中 a_0、a_1、b_0、b_1

是未知数，若已知 $\Delta T_1,\cdots,\Delta T_4$ ，则解此式即可求出 a_0 、 a_1 和 b_0 、 b_1 。进一步用下式便可求出所需参数 x_0 、 h 和 M_x 、 M_z 等

$$x_0 = 0.5b_1, h = \sqrt{-b_0 - 0.25b_1^2} \tag{7-3-5}$$

又因 $A = a_1, B = \frac{1}{h}(a_0 + 0.5a_1b_1)$ ，将其代入可得：

$$M_z = \frac{(2a_0 + a_1b_1)Q - 2a_1hP}{4bh(P^2 + Q^2)}, M_x = -\frac{(2a_0 + a_1b_1)P + 2a_1hQ}{4bh(P^2 + Q^{2)}} \tag{7-3-6}$$

上式中 P、Q 可由已知 I、α 的角求得。最后换算得到以实际长度表示 Δx 后的几何参数和磁性参数计算式：

脉水平位置 $x_0 = 0.5b_1\Delta x + x$

脉埋深 $h = \sqrt{-b_0 - 0.25b_1^2}\Delta x$ （7-3-7）

磁化率 $\kappa = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_z^2}}{|T_0|}, |T_0|$ 为正常地磁场模 （7-3-8）

其中 M_x 、 M_z 是由式（7-3-7）表达的 h 代入式（7-3-6）计算而得。

$$\theta = \arctan(\frac{M_x}{M_z}) \tag{7-3-9}$$

需要指出：

①h 为实数，必须满足条件 $-b_0 - 0.25b_1^2 > 0$ ，该条件与 Werner 算子的尺度有关。若算子选得太小，得到决定算子尺度的四点位于异常的线性段，则由此计算的深度偏大；反之若算子取得太大，则包含了相邻异常影响，致使计算结果不正确甚至不满足实数条件。算子尺度的最佳选择应在单峰异常以内并且足够小，但又要充分覆盖异常的斜率变化段及曲线的弯曲部分，使之满足为实数的条件。其选择要视异常的实际情况而定。

②由式（7-3-3）和式（7-3-8）可见，要求出磁化率必须已知脉宽；反之，要求出脉宽必须已知磁化率。

③式（7-3-9）给出的是有效磁化强度与垂直方向（直立脉）的夹角，对于倾斜脉则有 $\gamma = \arctan\frac{M_\perp}{M_{//}}$ 。式中 $M_\perp$ 为垂直于脉体倾向的有效磁化强度分量， $M_{//}$ 为平行于脉体倾向的分量，故 γ 角为有效磁化强度方向与倾向之间的夹角。若已知有效磁化倾角 i_s，则可求出脉状体倾角 $\alpha' = \gamma + i_s$ 。

④在倾斜脉情况下，脉的顶宽b'与真宽 b 有关系$b=b'\sin\alpha'$，在计算磁化率时需给定 b。

考虑到接触带的$\frac{\partial\Delta T}{\partial x}$曲线相当于接触面处存在一产状和埋深与接触面相同的薄脉体的ΔT曲线，用上述方法作反演，其过程完全相同。

在薄脉情况下、又存在背景场时，仍可采用 Werner 反褶积方法使非线性磁异常化为线性方程组，以简化反演问题。若设背景场为二次多项式$C_0+C_1x+C_2x^2$，则有：

$$\Delta T=\frac{A(x-x_0)+Bh}{(x-x_0)^2+h^2}+C_0+C_1x+C_2x^2$$

经整理后有：

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+b_0\Delta T+b_1x\Delta T=x^2\Delta T \qquad (7\text{-}3\text{-}10)$$

式中：$a_0=-Ax_0+Bh+C_0h^2+C_0x_0^2$；$a_1=A-2C_0x_0+C_1h^2+C_1x_0^2$;

$a_2=C_0-2C_1x_0+C_2x_0^2+C_2h^2;a_3=C_1-2C_2x_0;a_4=C_2;b_0=-x_0^2-h^2;b_1=2x_0$

式（7-3-10）表示含有七个未知数的线性方程，若代入七个已知的ΔT值及其相应的横坐标 x，则可列出线性方程组，并解出下列未知数：

$$\begin{cases} x_0=0.5b_1,h=\sqrt{-b_0-x_0^2},C_2=a_4 \\ C_1=a_3+2x_0C_2=a_3+2a_4x_0,C_0=a_2+2C_1x_0-C_2x_0^2-C_2h^2 \\ A=a_1+2C_0x_0-C_1h^2-C_1x_0^2,B=\frac{1}{h}[a_0+Ax_0-C_0h^2-C_0x_0^2] \end{cases} \qquad (7\text{-}3\text{-}11)$$

当求出 A、B 后，便可利用式（7-3-3）计算M_x、M_z。一次计算不一定能够完全消除背景场，可以通过迭代方法来消除。

二、计算步骤

1、设置一个一定大小的 Werner 窗口，让窗口沿异常曲线(总场，水平梯度)剖面逐点移动，每移动一次就计算得出一个 Werner 解。

2、逐次加大 Werner 窗口的宽度，得到不同 Werner 窗口的结果。

3、利用统计筛选的方法把那些偏离真解太大的沃纳解剔除掉，具体做法是：

（1）分别求出沃纳解的平均值，即水平位置，上顶埋深，板状体倾角和磁化率：$\bar{x}_0,\bar{h},\bar{a},\bar{k}.$

（2）计算它们的标准差，σ_{x0}，σ_h，σ_a，σ_k.

（3）去掉偏离真解太大的解，如我们要求沃纳解很集中，则以一倍均方差作为选择的标准：

$$x_0\in[\bar{x}_0-\sigma_{x0},\bar{x}_0+\sigma_{x0}],h\in[\bar{h}-\sigma_h,\bar{h}+\sigma_h]$$
$$k\in[\bar{k}-\sigma_k,\bar{k}+\sigma_k],a\in[\bar{a}-\sigma_a,\bar{a}+\sigma_a]$$

把不满足以上标准的沃纳解剔除,否则以 $n\sigma_{x0}$，$n\sigma_h$，$n\sigma_a$，$n\sigma_k$ 作为标准重新选择沃纳解。

（4）在缩小了范围的沃纳解中，重复（2），（3）步骤，逐次地求均值和方差，逐次剔除那些偏离均方值较大的解，把最后的结果用可视化技术在屏幕上实时显示并作图输出。

三、理论模型

图 7-3-1 是 4 个不同板宽，不同倾角，不同深度和不同磁化率的组合薄板模型沃纳反褶积的计算结果，组合薄板模型上方的黑点表示沃纳反褶积的计算深度，对于这样的复杂水平迭加模型，沃纳反褶积也能够精确地反演出模型深度值。

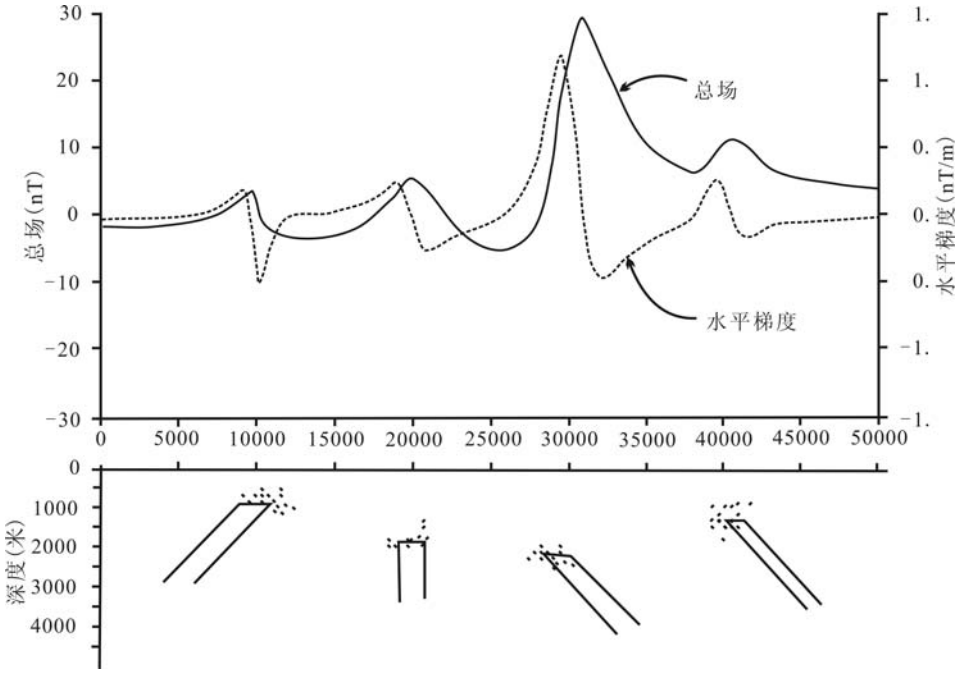


图 7-3-1　多个不同板宽、倾角、埋深及磁化率组合模型沃纳反褶积计算结果

第四节 欧拉（Euler）齐次方程方法

欧拉（Euler）齐次方程法又称欧拉反演方法。该方法不必预先知道待反演场源的形状、磁性参数等，能够自动、快速估算场源水平位置与埋深。它根据欧拉齐次方程的原理，利用磁异常及其水平一阶导数，地质体的“构造指数”来确定场源的位置。自 20 世纪 80 年代中后期以来，欧拉齐次方程方法已得到了较为广泛的应用，尤其是适用于大面积磁测数据的反演解释。与第三节沃纳（Werner）反褶积方法相比，它们都是快速反演方法，但欧拉（Euler）齐次方程法不仅能够用于二度，而且能够用于三度磁异常的反演解释。

一、方法原理

已知一些特殊形状场源的位场为 N 阶齐次方程，N 阶齐次方程也满足欧拉方程，欧拉方程的表达式为

$$r\square\nabla T = -NT \qquad (7\text{-}4\text{-}1)$$

式中：r 为场源点到观测点的距离向量；T 是磁异常；N 是方程的阶数。该方程的一个解为

$$T = \kappa / r^N$$

在磁异常情况下，κ 为一常数，N 可认为是异常幅值随距离增大的衰减率。针对任意起伏地形，将磁异常视为区域场与点源场之和，则具体的欧拉方程式（7-4-1）可表示为

$$(l^{(1)} - l^{(2)})\frac{\partial T}{\partial l^{(1)}} + (l^{(2)} - l_0^{(2)})\frac{\partial T}{\partial l^{(2)}} + (l^{(3)} - l_0^{(3)})\frac{\partial T}{\partial l^{(3)}} = N(B - T) \qquad (7\text{-}4\text{-}2)$$

式中：（$l^{(1)}, l^{(2)}, l^{(3)}$）为观测点的笛卡儿坐标系的三个正交坐标轴；（$l_0^{(1)}, l_0^{(2)}, l_0^{(3)}$）为场源中心点的坐标；$T$，$\frac{\partial T}{\partial l^{(1)}}$，$\frac{\partial T}{\partial l^{(2)}}$，$\frac{\partial T}{\partial l^{(3)}}$ 为磁异常及其在 $l^{(1)}, l^{(2)}, l^{(3)}$ 方向的梯度；N 为构造指数；B 为区域场或背景场。

当观测面水平时，或尽管观测面不水平，坐标系的两个坐标轴设置成水平并恒定不变；这样，$l^{(1)}, l^{(2)}, l^{(3)}$ 通常表示成 x，y，z，式（7-4-2）变成以下式（7-4-3）

$$(x - x_0)\frac{\partial T}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial T}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial T}{\partial z} = N(B - T) \qquad (7\text{-}4\text{-}3)$$

方程式（7-4-3）还可写为

$$x_0\frac{\partial T}{\partial x} + y_0\frac{\partial T}{\partial y} + z_0\frac{\partial T}{\partial z} + NB = x\frac{\partial T}{\partial x} + y\frac{\partial T}{\partial y}z\frac{\partial T}{\partial z} + NT \qquad (7\text{-}4\text{-}4)$$

如果能测量或计算出磁异常及其梯度值，方程（7-4-2）只有五个未知数 $l_0^{(1)}, l_0^{(2)}, l_0^{(3)} B$ 和 N（或 x_0, y_0, z_0, B 和 N）。一般而言，需要根据场源形状或有关异常性质的先验知识来选择构造指数 N。这样，可以利用三个或更多相邻观测点的数据（组成一个观测移动数据窗口，对于剖面数据为若干数据点构成的数据段，而对于平面网格化数据则通常为矩形数据窗口），通过解方程（7-4-4）组成的线性方程组便可计算出场源位置。在整个异常区将移动窗口从一处移到相邻的另一处，可以求得同一场源的多个解，这些解汇聚的位置可以被认为是场源中心点的位置。显然上述公式适用于起伏地形。

理论研究表明，对于一些形状规则的异常源，N 为一恒定的正整数。例如，对于单磁极线源 $N=1$；偶磁极线源 $N=2$；偶极子源 $N=3$。对于这些异常源，若能正确地选择 N，则利用该方程能够准确地求出异常源的位置。若选择错误的 N，将会导致解的发散。

从欧拉方程三维场源参数解的理论分析可知，移动窗口的大小、移动窗口所处位置以及构造指数 N 值选择的正确与否是影响场源参数数值解稳定性的三个主要因素。

二、理论模型

图 7-4-1 是二度欧拉齐次方程法确定磁源体位置与深度的例子。理论模型为一个垂直薄板状体，水平位置与上顶埋深分别为 150m 与 10m，将理论模型的磁异常及其换算的水平与垂直一阶导数按程序对话框输入并运行程序，程序自动计算得到的磁性体水平位置，垂直位置并把计算结果投到图上，可以看到在水平位置为 150m，垂直位置为 10m 处计算结果非常密集，再人工用鼠标选择一个合理的计算结果。该计算结果与理论模型吻合很好。

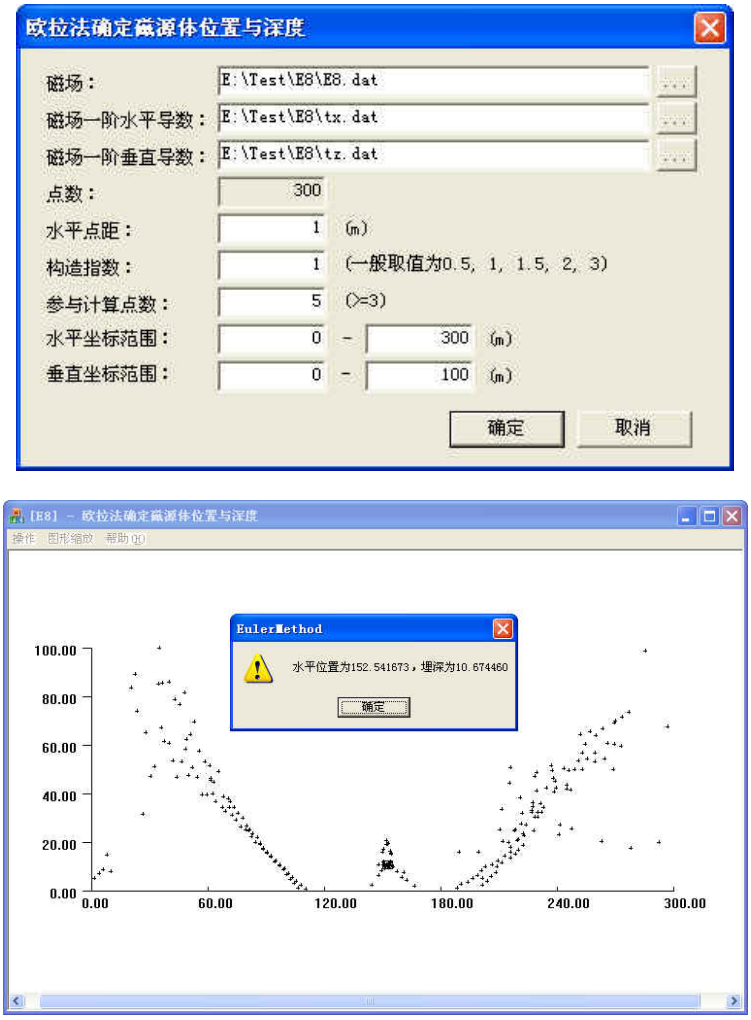


图 7-4-1　欧拉方程法确定磁源体位置与深度的程序对话框

第五节 最优化反演方法

根据磁测资料进行推断解释的目的是要解决测区内的磁异常是由什么地质体引起的，岩石、地质构造和矿产的分布情况，以及引起磁异常的地质体（或矿体）的空间位置、大小、形状和产状如何？最优化反演方法是一种自动反演方法，其实质是选择法，它将实测资料与已知形状、产状的模型体所产生的理论异常对比，反复修改模型体的大小、产状等参量，使理论曲线和实测曲线尽可能拟合，则取该理论曲线对应的模型体作为实际地质体解释的结果。用最优化法进行磁异常反演的步骤如下:

(1) 给出实测磁异常及测点的坐标；

(2) 选择进行解释的地质体模型，如二度倾斜有限延深板状体，三度倾斜长方体等；

(3) 给出地质体模型参量(包括物性、空间位置、大小等)初始估计值(称初值)；

(4) 计算地质体模型的理论异常,并将该异常与实测异常对比；

(5) 根据理论曲线与实测曲线的符合程度,即它们之间差异,判断是否需要修改地质体参数重新计算对比；

(6) 若理论曲线与实测曲线的符合程度不满足预先给定的要求,则修改地质体模型的参量,以使理论曲线与实测曲线之间的差异不断减小,如此反复迭代,直到满足要求为止；

(7) 输出最后模型体的参数,作为解释结果。

在上述步骤中提出了两个重要的问题:一是如何评定理论曲线与实测曲线之间的符合程度以及要求满足的精度标准(即收敛标准) ,二是如何修改地质体模型的参量。 前者是一个判定准则的选择,后者是对数学上求多参量非线性函数极值的最优化方法的选择。最基本的最优化方法有最小二乘法（即高斯法）与最速下降法（即梯度法）但高斯法常常不能保证收敛；梯度法虽然能够收敛，但收敛速度太慢。阻尼最小二乘法是对上述两种方法改进的一种 方法。

一、方法原理

我们设观测异常以 ΔT_k 表示， k 为观测点号， $k=1,2,3$，. . . ， m； m 为观测点数。

设所选模型体的理论异常以 ΔT 表示， ΔT 是观测点坐标和模型体参量的函数，即

$$\Delta T = f(x_k, y_k, z_k, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n) \tag{7-5-1}$$

式中 x_k, y_k, z_k 为观测点坐标； $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 为模型体位置、大小、产状和物性等参量； n 为参量个数。

通常，实测异常和理论异常之间的符合程度用各测点上两者之间偏差的平方和表示，我们以 ϕ 表示，即

$$\phi = \sum_{k=1}^{m} \left[\Delta T_k - f(x_k, y_k, z_k, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)\right]^2 \tag{7-5-2}$$

在式（7-5-2）中， $x = (b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)^T$ 为待求的模型体参数，故 ϕ 可以视为 b 的函数， $\phi = \phi(b)$ 。

在最优化选择法的计算中，要实现自动修改模型体的参量，计算模型体参量的改正量，即如何求一组参量 x 使 $\phi(x)$ 为极小。设给定模型体初始参量以 $b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \cdots\cdots, b_n^{(0)}$ 表示，求一组关于模型体参量的改正量 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 来修改给定的初始参量，即

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= b_1^{(0)} + \delta_1 \\ b_2 &= b_2^{(0)} + \delta_2 \\ \cdots\cdots &\quad \cdots\cdots \\ b_n &= b_n^{(0)} + \delta_n \end{aligned}\right\} \tag{7-5-3}$$

写成向量的形式为

$$b_i = b_i^{(0)} + \delta_i (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

如第一次迭代，则为 $b^{(1)}{}_i = b_i^{(0)} + \delta_i (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$，这样便求得关于模型体参量的第

一次迭代的一组新值。如果将这组值代入（7-5-2）中能使ϕ值减小，则这一次迭代成功。经过多次迭代后如果第 j 次的模型体参量能在给定精度范围内使ϕ取得极小，则第 j 次的模型体参量$b_1^{(j)},b_2^{(j)},\cdots\cdots,b^{(j)}{}_n$为解释结果。在这个准则下的选择法就称为在最小二乘意义下的最优化选择法。

我们称ϕ为目标函数，最优化方法的关键在于求出使ϕ取极小的改正量δ。为解决这个问题可以有多种算法，这里介绍最小二乘法，最速下降法和阻尼最小二乘法。

（一）最小二乘法（高斯方法）

为讨论方便，我们把（7-5-1）式以向量形式表示。考虑在δ的迭代过程中x_k,y_k,z_k不变，故有：

$$\Delta T = f(\vec{b}) \tag{7-5-4}$$

式中：$\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n)^T$。$\vec{b}$表示向量 b，T 表示转置。同样（7-5-2）式写成向量形式：

$$\phi=\left[\Delta T - f(\vec{b})\right]^T\cdot\left[\Delta T - f(\vec{b})\right] \tag{7-5-5}$$

再有$\vec{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots\cdots,\delta_n)^T$。

一般来说，f是$\vec{b}$的非线性函数，直接求$\vec{b}$和$\vec{\delta}$是很困难的。通常是将f在$\vec{b}$附近线性化。在$\vec{b}^{(0)}$附近将f作泰勒展开，并略去$\vec{\delta}$的二次和二次以上的项，有：

$$f(\vec{b}^{(0)}+\vec{\delta})=f(\vec{b}^{(0)})+P\vec{\delta} \tag{7-5-6}$$

式中P为雅可比矩阵：

$$P_{m\times n}=\left(\frac{\partial f}{\partial b_i}\right)_{\vec{b}_i=\vec{b}^{(0)}} \tag{7-5-7}$$

将式（7-5-6）代入式（7-5-5），可得ϕ的线性化近似值，以$\hat{\phi}$表示：

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\vec{b}^{(0)}+\vec{\delta})&=\left[(\Delta\vec{T}-f(\vec{b}^{(0)}))-P\vec{\delta}\right]^T\cdot\left[(\Delta\vec{T}-f(\vec{b}^{(0)}))-P\vec{\delta}\right]\\&=\left[\Delta\vec{T}-f(\vec{b}^{(0)})\right]^T\cdot\left[\Delta\vec{T}-f(\vec{b}^{(0)})\right]-2\left[\Delta\vec{T}-f(\vec{b}^{(0)})\right]^T\cdot P\vec{\delta}+\delta^T P^T P\vec{\delta}\end{aligned} \tag{7-5-8}$$

使$\hat{\phi}$为极小，则$\vec{\delta}$应满足关系：

$$\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\vec{f}}=-2P^T\left[\Delta\vec{T}-f(\vec{b}^{(0)})\right]+2P^T P\vec{\delta}=0$$

令 $$A = P^T P, \vec{g} = P^T \left[\Delta\vec{T} - f(\vec{b}^{(0)}) \right]$$

则有 $$A\vec{\delta} = \vec{g} \tag{7-5-9}$$

由上式可解得：

$$\vec{\delta} = A^{-1}\vec{g} \tag{7-5-10}$$

在实际处理中，当观测值给出，模型体选定并给出初值后，$P, A, \vec{g}$ 均可计算出。求解方程式(7-5-10)即可得 $\vec{\delta}$。

前已说过，非线性问题需要反复迭代和修正，关键在于泰勒展开式（7-5-6）是近似的，因此求得的 $\vec{b}$，$\vec{\delta}$ 也是近似的。其近似程度依赖于 $\vec{\delta}$ 的大小。若 $\vec{\delta}$ 过大，则 $\vec{\delta}$ 的二次项及二次以上项不能忽略，这就不能保证平稳的收敛于 ϕ 的极小值。

以上方法通常称为高斯法，高斯法在应用时，要求矩阵 A 是正定的和非奇异的，否则就不能区分极大，极小与鞍点，或者不能求解。高斯法应用的另一个困难是迭代过程常常不稳定。

（二）最速下降法

最速下降法的思想是这样：要求 $\Phi(b)$ 的极小值，从 $b^{(0)}$ 出发，应该沿着函数 Φ 减小得最快的方向去找。

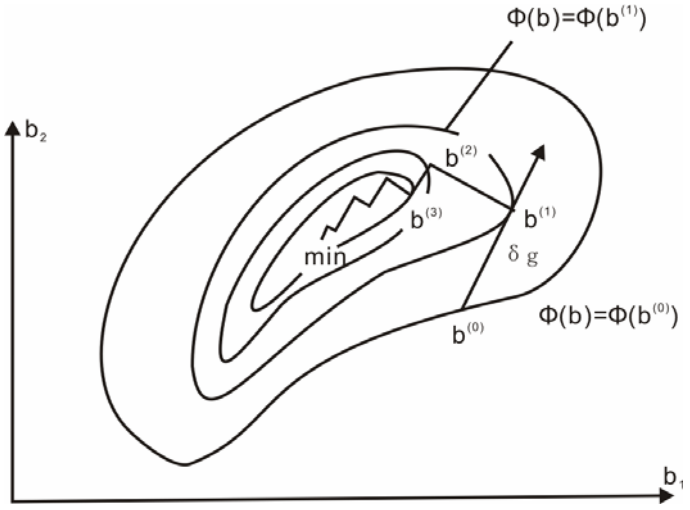


图 7-5-1 二次型梯度法求极小路径示意图

从 $b^{(0)}$ 出发，函数 $\Phi(b^{(0)})$ 点减小得最快的方向是什么方向呢？这应当是函数 Φ 在 $b^{(0)}$ 点的梯度方向的反方向。我们知道在 $b^{(0)}$ 点函数 Φ 的梯度矢量为：

$$grad\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial b_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial b_2}, \cdots\cdots, \frac{\partial\Phi}{\partial b_n}\right)_{b=b^{(0)}} \tag{7-5-11}$$

若另取一个方向 C，在 $b^{(0)}$ 点 $\Phi(b)$ 在 C 方向的变化速率为

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\Phi(b^{(0)}+\alpha C)\right]_{\alpha=0}=(\frac{\partial\Phi}{\partial b_1})_{b_1^{(0)}}C_1+(\frac{\partial\Phi}{\partial b_2})_{b_2^{(0)}}C_2+\cdots\cdots+(\frac{\partial\Phi}{\partial b_n})_{b_n^{(0)}}C_n \qquad (7\text{-}5\text{-}12)$$

由上式可见函数Φ在$b^{(0)}$点沿 C 方向的变化速率就是在$b^{(0)}$点函数Φ的梯度矢量在 C 方向上的投影，显然 C 与$grad\Phi$重合时此值最大，所以$\Phi(b)$在$b^{(0)}$点增加最快的方向就是$grad\Phi$方向，而其反方向就是函数Φ减小最快的方向，我们将该方向记为δ_g。所以最速下降法有时也成为梯度法。

我们沿着最速下降方向δ_g，寻找校正量δ，这时（7-5-3）式可以写成：

$$b=b^{(0)}+\lambda\delta_g$$

式中 $$\delta_g=-(\frac{\partial\Phi}{\partial b_1},\frac{\partial\Phi}{\partial b_2},\cdots,\frac{\partial\Phi}{\partial b_n})^T$$

问题在于如何求得λ，使

$$\Phi(\lambda)=\Phi(b)=\Phi(b_1^{(0)}-\frac{\partial\Phi}{\partial b_1},b_2^{(0)}-\frac{\partial\Phi}{\partial b_2},\cdots\cdots,b_n^{(0)}\frac{\partial\Phi}{\partial b_n}) \qquad (7\text{-}5\text{-}13)$$

取极小。

因为函数Φ为非负，如果$\lambda\delta_g$较小，将$\Phi(b^{(0)}+\lambda\delta_g)$泰勒展开到一次项，可写出：

$$\Phi(b^{(0)}+\lambda\delta_g)=\Phi_0-\lambda\delta_g^T\delta_g=\Phi_0-\lambda\left|grad\Phi_0\right|^2 \qquad (7\text{-}5\text{-}14)$$

使Φ取极小，我们取等式右边为零，由此可得：

$$\lambda=\frac{\Phi}{(\frac{\partial\Phi}{\partial b_1})^2+(\frac{\partial\Phi}{\partial b_2})^2+\cdots+(\frac{\partial\Phi}{\partial b_n})^2}\Big|_{b=b^{(0)}}=\frac{\Phi_0}{\left|grad\Phi_0\right|^2} \qquad (7\text{-}5\text{-}15)$$

将λ代入可求出第一次迭代的修正值$b^{(1)}$：

$$b^{(1)}=b^{(0)}-\frac{\Phi_0}{\left|grad\Phi_0\right|^2}\cdot\Phi \qquad (7\text{-}5\text{-}16)$$

以$b^{(1)}$作为新的初值，继续沿$b^{(1)}$点函数的δ_g方向进行计算，求出λ和第二次迭代更正值，如此继续下去，即可最后逼近Φ的极小值。其迭代过程如图 7-5-1 所示。

最速下降法一般能保证收敛，但收敛速度常常很慢，特别在函数Φ的 n 维椭球面是拉长椭球面的情况更是如此。

（三）阻尼最小二乘法（马奎特法）

阻尼最小二乘法也称马奎特法，1963 年，马奎特高斯法做了有效的改正，这种方法在实际应用中应用效果较好。

由前面叙述我们知道，用高斯法进行迭代时，校正矢量的步长较大，如果初值给的较好，也能快收敛，但它的收敛性不稳定，当初值不好时则容易发散，而最速下降法的情况正好相反，它一般能保证收敛，但步长很小，计算很费时间。

另外，高斯法的校矢量的方向(δ_t)和最速下降法的方向(δ_g)也往往不一致，特别是当$\Phi(b)$的等值面是拉长椭球的情况，两者方向之间的夹角 r 可达 80-90°，如图 7-5-2 所示，例如对于二次型，高斯法的方向是直接指向Φ的极小点，而最速下降法方向δ_g是负梯度方向，它是垂直通过$b^{(0)}$点函数的等值面的。正因为这样，对于非线性函数当等值面拉得很长时，δ_t远远偏离负梯度方向。这是造成高斯法经常失败的主要原因。

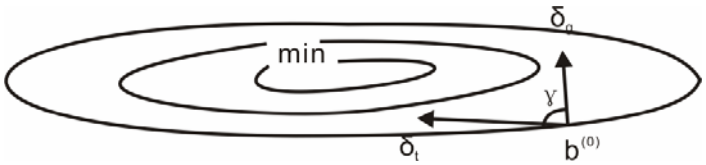


图 7-5-2

阻尼最小二乘法是在高斯法和最速下降法之间取某种插值，它力图以最大步长前进同时又能紧靠负梯度方向，这样既能保证收敛，又加快收敛速度。它的基本思想是：在迭代过程中的每一步。尽量使用接近高斯改正量的方向，以使校正步长尽可能的增大，如当这种情况不能收敛时，则改用接近最速下降法的方向δ_g，同时缩小步长，以保证收敛。阻尼最小二乘法的校正矢量我们以δ_0表示。

实现这种思想的数学方法，只要将方程

$$A\delta_t = g \tag{7-5-17}$$

改变为

$$(A+\lambda I)\delta_0 = g \qquad (\lambda>0) \tag{7-5-18}$$

就可以了。式中δ_0是我们需要求得的对参数的校正矢量，即马奎特校正矢量，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵，λ为我们选取来控制校正方向和步长的任意正数，校正矢量δ_0是λ的函数，即

$$\delta_0 = \delta_0(\lambda)$$

由式(7-5-17)变成方程式(7-5-18)，改善了收敛性，这是很明显的，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是奇异的，当λ>0 时$(\boldsymbol{A}+\lambda \boldsymbol{I})$则为正定的。

由式(7-5-12)，当λ=0 时，$\delta_0 = \delta_t$，马奎特法退化为高斯法，而当$\lambda \to \infty$时，$\delta_0 = \frac{1}{\lambda} g$，g 是最速下降法的方向，这时马奎特校正方向就是最速下降法的方向。由此可见：

(1) 当λ越来越大时，δ_0的长度越来越小，且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\delta_0\|=0$$

这里$\|\delta_0\|$表示矢量δ_0的长度。

(2) 当λ由零逐渐增大时，δ_0的方向逐渐由高斯法方向δ_t转向最速下降法的方向δ_g，λ越大δ_0越接近δ_g。

（3）对λ>0 的任意实数，δ_0方向使$\hat{\Phi}$在半径为$\|\delta_0\|$的球面上取极小。

上述(2)说明$\delta_0(\lambda)$当λ增大时是越来越接近Φ的负梯度方向，即总是指向Φ的下降方向。又根据(1)，当$\lambda\to\infty$时，$\|\delta_0\|\to 0$，因此，对于任意第 l 次迭代值$b^{(l)}$，我们总可以找到充分大的λ，使

$$\Phi(b^{(l)}+\delta_0(\lambda))<\Phi^{(l)}=\Phi(b^{(l)})$$

如果我们取$b^{(l+1)}=b^{(l)}+\delta_0^l$，就保证了$\Phi$在每次迭代中改善。所以上述(1)，(2)是保证下面迭代过程得以稳定进行的理论依据。而(3)则说明在跨出同样步长的情况下，以$\delta_0(\lambda)$的方向为最好，这便从理论上说明了这种方法的优点。

（四）阻尼最小二乘法的计算步骤

图 7-5-3 是阻尼最小二乘法的计算框图。我们来看看阻尼最小二乘法在计算机上是怎样实现的。上述待求的模型体参数用$x=(b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n)^T$表示，为了与通常解方程习惯使用的符号一致，以下改用待求的模型体参数用$x=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)^T$表示。

(1) 输入模型体的初始值$x^{(0)}$及实际观测值ΔT。对于二度体可选择下延有限板状体，下延有限板状体其初始值$x^{(0)}$包括板的上顶埋深$h^{(0)}$，板的水平宽度$2b^{(0)}$，板的下延伸度$2l^{(0)}$，板的倾角$\alpha^{(0)}$，板上顶中心在地面的投影位置$x_0^{(0)}$，以及磁化强度的大小$J^{(0)}$和方向$i_s^{(0)}$共 7 个参数。

(2) 给定初始阻尼因子λ_0，通常取$\lambda_0=10^{-1}$。迭代收敛标准ε和迭代次数，它们是控制迭代过程何时结束的控制量。而ε大小应当很据观测资料的精度来确定。

(3) 根据正演公式和给定初始值$x_0^{(0)}$计算理论值$f(x)$，并由理论值$f(x)$和观测值ΔT计算偏差平方和Φ。

(4) 计算待求参数x对于模型参数的偏导数并形成雅可比矩阵。对于板状体即有$\frac{\partial f_k}{\partial h},\frac{\partial f_k}{\partial 2b},\frac{\partial f_k}{\partial 2l},\cdots$，$f_k$是模型参数。$P=(\frac{\partial f_k}{\partial x_i})_{m\times n}$为$f_k(x),(k=1,2,\cdots,m)$在$x^{(r)}$处的雅可比

矩阵。

(5) 由雅可比矩阵 P 计算正规方程组的系数 $A=P^TP$ 和右端项 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)^T$，

$g_i=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\left[\Delta T_k-f_k(x^{(r)})\right](i=1,2,\cdots,n)$。

(6) 将正规方程组的系数矩阵 A 和右端项 g 规格化，则

$A=(a_{ij})$，规格化后 $A^*=(a_{ij}/\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}})$

$g=(g_i)$，规格化后 $g^*=(g_i/\sqrt{a_{ii}})$

规格化后的目的是因为 A 矩阵中的 a_{ij} 数量级差别很大，为了减少误差。规格化后使 A 中的元素数量级上差别不会太大。规格化后 A 中对角线元素 a_{ij} 的值都为 1。

(7) 把阻尼因子 λ 缩小 γ 倍，γ 通常取为 10(这是当迭代成功时需要加大步长缩小阻尼因子采用的。

(8) 将阻尼因子加入到正规方程 $A^*\delta^*=g^*$ 中 A^* 的对角元素上得阻尼最小二乘法德正规方程

$$(A^*+\lambda I)\delta^*=g^*$$

注意到，由于我们采用高斯线性化方法和采用最小二乘法。这里求得的是模型参数的改正量 δ^* 而不是模型参数。

(9) 解正规方程得模型参数的改正量 δ，并得到这一次迭代模型参数值 $x: x_i=x_i^{(0)}+\delta_i$

(10)根据本次迭代得到的模型参数 x 计算理论值和偏差平方和 Φ。

(11) 如果这一次计算的偏差平方和小于上一次的偏差平方和，则认为本次迭代成功，将本次迭代的结果作为新的初值返回(4)进行下一次计算。否则，缩小步长放大 λ，$\lambda=\gamma\lambda$，返回到(9)重新解方程。

(12) 如此迭代下去，当满足了规定的迭代次数或达到规定的精度，即可停止迭代，把最后的模型参数 x 作为反演计算的结果。

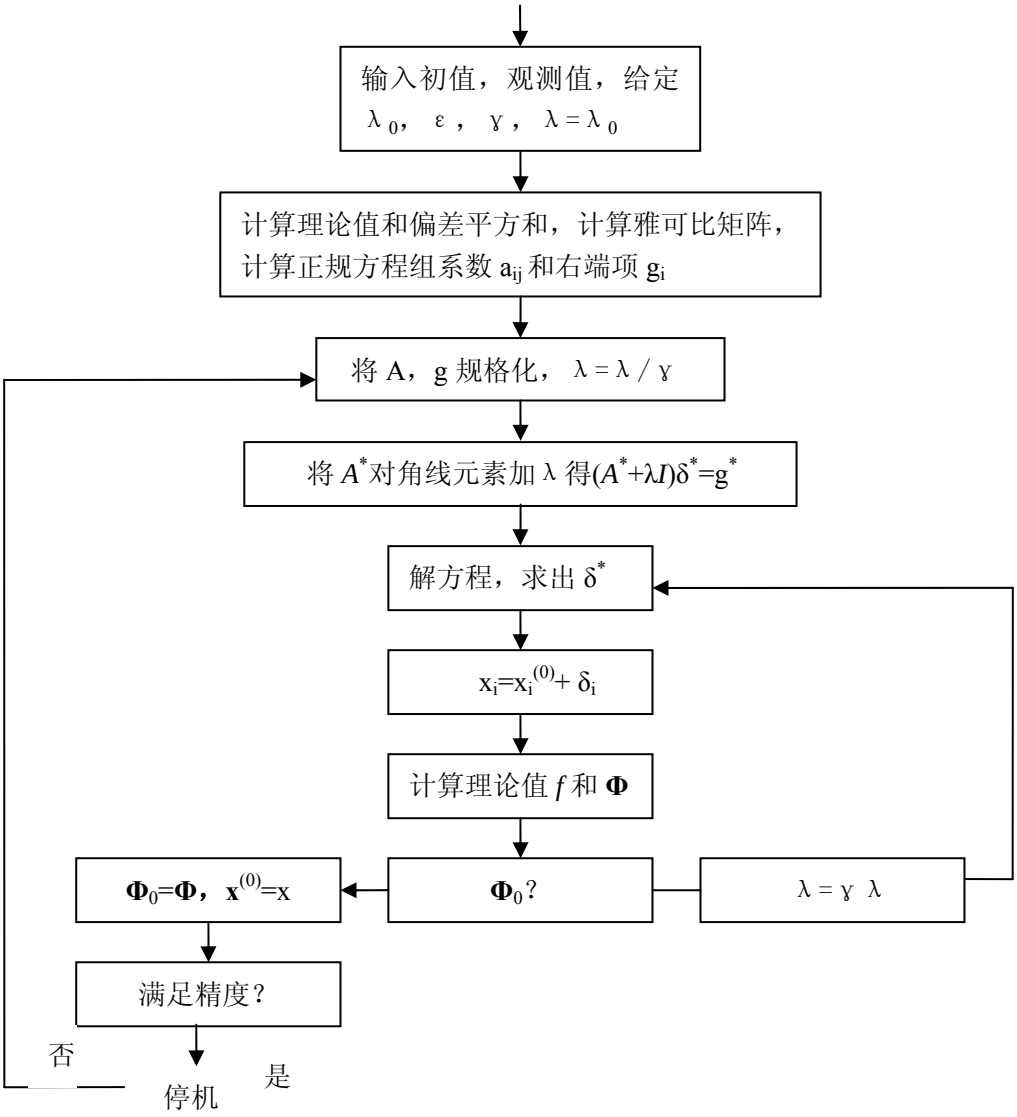
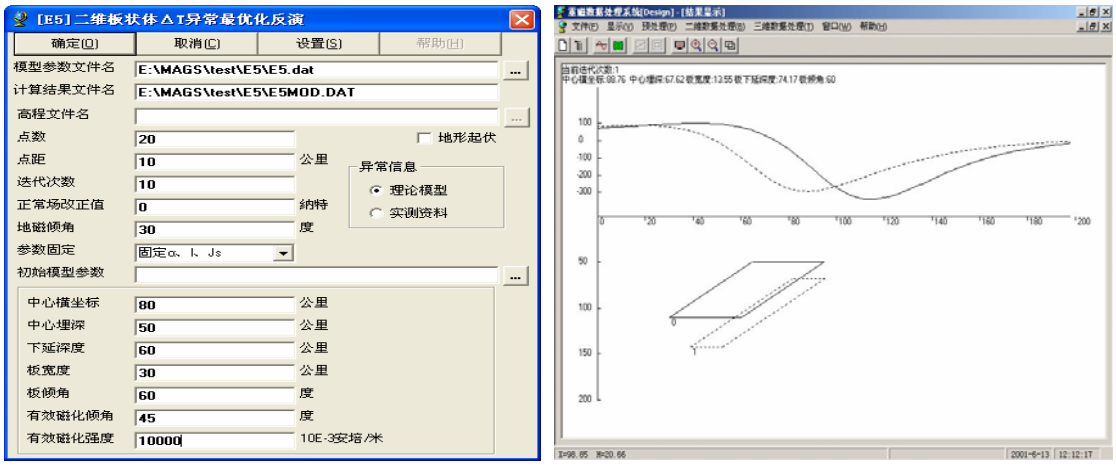


图 7-5-3　阻尼最小二乘法的计算框图

二、理论模型

图 7-5-4 二度板状体阻尼最小二乘法反演的模型实例，（a）是该方法软件的对话框，输入模型参数、计算结果文件名，及剖面的点数、点距、迭代次数等参数，初始模型后，程序会自动迭代进行反演解释，图(b)是表示自动迭代的过程，虚线模型为 0，1，2……次迭代结果，实线为最终结果。



(a) (b)

图 7-5-4 二度板状体阻尼最小二乘法反演反演

第六节 人机交互反演方法

可视化技术是利用现代计算机显示和描述地下诸多地质现象的一种技术，广泛应用于地质与地球物理解释。磁测资料可视化反演是指利用可视化技术，实现解释人员与计算机的交互反演解释。实际观测的磁异常曲线（曲面或等值线图）、地质模型及其正演计算的磁异常曲线在计算机屏幕上始终以图形或图像实体出现，解释人员可以直接对地质模型进行操作（修改、反演），实时地计算修改地质模型并将所产生的磁异常值与实际观测值进行比较，通过地质模型形态、物性的不断修改，使得磁异常正演计算值与实际观测值的逐步拟合以最终达到反演目的。

磁测资料人机交互反演采用的模型通常有 2D、2.5D 任意多边形截面水平柱体与 3D 任意形状地质体。2D、2.5D 任意多边形截面水平柱体正演有解析式，3D 任意形状地质体则只能采用近似积分方法。人机交互方法是通过在各个剖面上修改地质体的角点来实现实时拟合和反演解释的，它充分地发挥了解释人员的经验，具有方便、快捷的优点。但是人机交互反演也有反演解释结果随意性太大的问题，解释人员在做人机交互反演之前，应当了解地质情况，并用其他的反演方法，如切线法，欧拉（Euler）齐次方程法等先对反演目标有一个初步的判断，这样就可以大大地减少人机交互反演结果的多解性。我们以 3D 任意形状地质体的人机交互反演为例说明。

在我国的许多危机矿山，有大量已知的勘探线，钻孔已准确地控制了浅部矿体形态，且矿体形态十分复杂，多个矿体、磁性岩体等互相组合，很难用简单的反演方法及模型来描述矿体与围岩的复杂形态。因此，必须研究能够在一个勘探剖面、截面内精细修改，同时又是三度体的人机交互反演方法。3D 任意形状地质体的人机交互反演方法的主要内容是：

(1)采用任意三度体模型，其正演计算用数值积分法，即用辛普生积分和梯形积分实现三度体磁场三重积分的近似计算。

(2)为了便于修改模型，修改的过程是在剖面内完成，对 x，y 不同方向剖面逐条修改拟合，每一次修改拟合的正演计算都采用数值积分对任意三度模型进行计算。

(3)初始模型由已知的勘探线所控制的矿体、围岩形成，在此基础上交互反演主要用于解释深部矿体。

(4)在 Windows 环境下，用 Visual C 语言，OpenGL 函数实现立体模型与平面组合模型的旋转、移动、放大、缩小，以及任意选择剖面、断面进行精细反演解释。

一、3D 任意形状地质体磁异常的正演计算

利用重磁位场关系的泊松公式，并令 $f\rho=1$，同时假设地质体均匀磁化,则可得 P 点磁位:

$$U=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{M}\cdot grad_p V \tag{7-6-1}$$

由 $T=-\mu_0 grad_p U=-\mu_0\Delta U$，可求出 P 点磁场三个分量：

$$\begin{cases} X_a=-\mu_0\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[M_X\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+M_Y\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+M_z\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right] \\ Y_a=-\mu_0\dfrac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[M_X\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+M_Y\dfrac{\partial_2 V}{\partial y^2}+M_Z\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}\right] \\ Z_a=-\mu_0\dfrac{\partial U}{\partial z}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[M_X\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}+M_Y\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}+M_Z\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] \end{cases} \tag{7-6-2}$$

$$\Delta T=Xa\cos I\ \cos A'+Ya\cos I\sin A'+Za\sin I \tag{7-6-3}$$

其中 M_X，M_Y，M_Z 为磁化强度的三分量，μ_0 为真空中的导磁率，I 是地磁倾角，A 是测线磁方位角，即 X 轴与磁北夹角。

因此，重磁正演计算的基本公式可以归纳为

$$\begin{cases} \Delta g=f\sigma V_Z \\ X_a=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[M_X V_{XX}+M_Y V_{XY}+M_z V_{XZ}\right] \\ Y_a=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[M_X V_{XY}+M_Y V_{YY}+M_Z V_{YZ}\right] \\ Z_a=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[M_X V_{XZ}+M_Y V_{YZ}+M_Z V_{ZZ}\right] \end{cases} \tag{7-6-4}$$

而 V_Z , V_{XZ} ,V_{YZ} ,V_{ZZ} ,V_{XX} ,V_{XY} ,V_{YY} 为

$$V_Z=\iiint_Q\frac{z_Q-z_P}{R^3}dx_Q dy_Q dz_Q,\quad V_{XZ}=\iiint_Q\frac{3(x_Q-x_P)(z_Q-z_P)}{R^5}dx_Q dy_Q dz_Q$$

$$V_{YZ}=\iiint_Q\frac{3(y_Q-y_P)(z_Q-z_P)}{R^5}dx_Q dy_Q dz_Q,\quad V_{ZZ}=\iiint_Q\frac{3(z_Q-z_P)^2-R^2}{R^5}dx_Q dy_Q dz_Q$$

$$V_{XX}=\iiint_Q\frac{3(x_Q-x_P)^2-R^2}{R^5}dx_Q dy_Q dz_Q,\quad V_{XY}=\iiint_Q\frac{3(x_Q-x_P)(y_Q-y_P)}{R^5}dx_Q dy_Q dz_Q$$

$$V_{YY}=\iiint_Q\frac{3(y_Q-y_P)^2-R^2}{R^5}dx_Q dy_Q dz_Q$$

对于球体等规则几何形体，上述 7 个三重积分可以解析求出，而对于不规则形体，则只

能采用数值积分方法。

二、三维数值积分

如图 7-6-1 所示，我们用两种截面把一个任意三维地质体分割成许多小的棱柱体，每个棱柱体相当于一个直立线元。沿 Z 轴的一重积分可以通过解析式求出。在求出各线元的作用值之后，沿 X，Y 方向分别进行数值积分，即可求出整个地质体的作用值。

（一）线元作用值的计算

以坐标原点为计算点，求出各个线元在 P 点作用值，记为 S：

$$\begin{cases} s_z=\int_{z_{Q1}}^{z_{Q2}}\frac{z_Q}{R^3}dz_Q, s_{xx}=\int_{z_{Q1}}^{z_{Q2}}\frac{3x^2{}_Q-R^2}{R^5}dz_Q, s_{xz}=\int_{z_{Q1}}^{z_{Q2}}\frac{3x_Qz_Q}{R^5}dz_Q, s_{xy}=\int_{z_{Q1}}^{z_{Q2}}\frac{3y_Qx_Q}{R^5}dz_Q \\ s_{yz}=\int_{z_{Q1}}^{z_{Q2}}\frac{3y_Qz_Q}{R^5}dz_Q, s_{yy}=\int_{z_{Q1}}^{z_{Q2}}\frac{3y^2{}_Q-R^2}{R^5}dz_Q, s_{zz}=\int_{z_{Q1}}^{z_{Q2}}\frac{3z^2{}_Q-R^2}{R^5}dz_Q \end{cases} \tag{7-6-5}$$

上述积分可以解析求得：

$$\begin{cases} s_z=-(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}), s_{xz}=-(\frac{x_Q}{R_2^3}-\frac{x_Q}{R_1^3}), s_{yz}=-(\frac{y_Q}{R_2^3}-\frac{y_Q}{R_1^3}), s_{zz}=-(\frac{z_{Q_2}}{R_2^3}-\frac{z_{Q_1}}{R_1^3}) \\ s_{xx}=\frac{x_Q^2}{(x_Q^2+y_Q^2)^2}[\frac{3z_{Q_2}}{R_2}-\frac{3z_{Q_1}}{R_1}-\frac{z_{Q_2}^3}{R_2^3}+\frac{z_{Q_1}^3}{R_1^3}]-\frac{1}{x_Q^2+y_Q^2}(\frac{z_{Q_2}}{R_2}-\frac{z_{Q_1}}{R_1}) \\ s_{xy}=\frac{x_Qy_Q}{(x_Q^2+y_Q^2)^2}[\frac{3z_{Q_2}}{R_2}-\frac{3z_{Q_1}}{R_1}-\frac{z_{Q_2}^3}{R_2^3}+\frac{z_{Q_1}^3}{R_1^3}] \\ s_{yy}=\frac{y_Q^2}{(x_Q^2+y_Q^2)^2}[\frac{3z_{Q_2}}{R_2}-\frac{3z_{Q_1}}{R_1}-\frac{z_{Q_2}^3}{R_2^3}+\frac{z_{Q_1}^3}{R_1^3}]-\frac{1}{x_Q^2+y_Q^2}(\frac{z_{Q_2}}{R_2}-\frac{z_{Q_1}}{R_1}) \end{cases} \tag{7-6-6}$$

其中 $R_1=(x_Q^2+y_Q^2+z_{Q_1}^2)^{1/2}$ ， $R_2=(x_Q^2+y_Q^2+z_{Q_2}^2)^{1/2}$ 。

当 $x_Q=y_Q=0$ 时，即计算点 P 位于直立点线元正上方，则

$$\begin{cases} s_{xx}=s_{yy}=\frac{1}{2}[\frac{1}{z_{Q_2}^2}-\frac{1}{z_{Q_1}^2}] \\ S_{xy}=S_{xz}=S_{yz}=0 \end{cases} \tag{7-6-7}$$

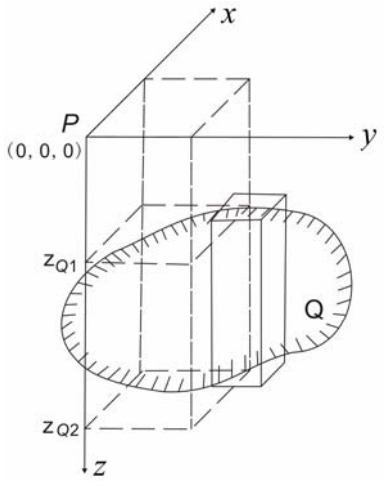


图 7-6-1 积分法线元示意图

（二）X，Y 方向的数值积分计算

如图 7-6-2 所示，在实际情况中，测线往往是不等间距的，而测点是等间距，在 X 方向取一系列平行于 Y 轴的不等距截面，在 Y 轴取一系列平行于 X 轴的等间距截面，下面分别计算 X，Y 两个方向的数值积分。

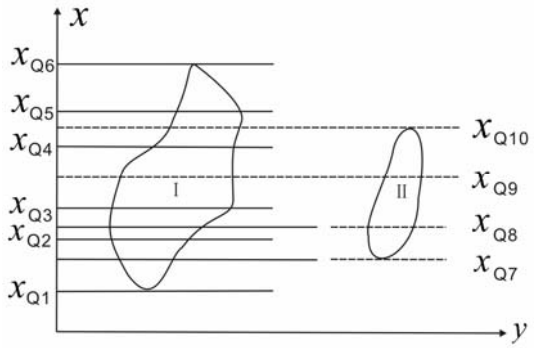


图 7-6-2 X 轴方向截面

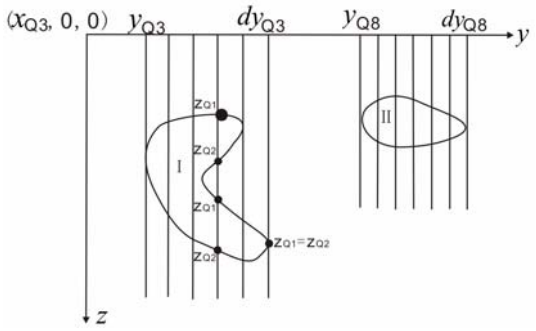


图 7-6-3 某 X_Q 截面内一组垂直于 y 轴截面

1）在 Y 方向的数值积分：

S 为已经求得的线元作用值，整个异常源的作用值为 V_K：

$$V_K = \iint s(x_Q, y_Q)dy_Q dx_Q = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-2} w_i c_j s_k(x_Q, y_Q) \qquad (7\text{-}6\text{-}8)$$

式中 w_i，c_j 为 X，Y 方向数值积分的积分系数。

由于 Y 轴方向上的截面为等间距且是奇数，故可采用等间距三点辛普生积分公式，记截面值为 V(x)

$$\mathrm{V}(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} c_j s = \frac{\Delta y}{3}[s_1 + s_{2n+1} + 2\sum_{i=1}^{2n-1} s_{2l-1} + 4\sum_{i=1}^{2n} s_{2l}] \qquad (7\text{-}6\text{-}9)$$

式中 Δy 即图中截面间距 dy_Q。

2）在 X 方向的数值积分.

由于 X 方向截面为不等间距，截面可为奇数也可为偶数。因此，当截面数为奇数时，采用不等距三点辛普生积分公式。当截面为偶数时，在最后一个积分区间 (2n-1，2n) 采用梯形积分公式，其它区间仍用三点不等距的辛普生积分公式。

①不等间距辛普生积分

设三点不等间距积分结点 X 坐标为 X_1，X_2 和 X_3，对应函数值 V（X_1），V（X_2），和 V（X_3）则：

$$\int_{x_1}^{x_3} \mathrm{V}(x)dx$$

对于被积函数 V（X）可采用拉格朗日二次多项式来描述：

$$\int_{x_1}^{x_3} \mathrm{V}(x)dx = \int_{x_1}^{x_3} [\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\mathrm{V}(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\mathrm{V}(x_2)$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\mathrm{V}(x_3)]dx \qquad (7\text{-}6\text{-}10)$$

利用积分公式$\int (u-a)(u-b)du=\frac{1}{6}(u-a)^2(2u-3b+a)$可以得出

$$\int_{x_1}^{x_3} \mathrm{V}(x)dx=\frac{1}{6}[\frac{(x_1-x_3)(3x_2-x_3-2x_1)}{(x_1-x_2)}\mathrm{V}(x_1)+\frac{(x_1-x_3)^3}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\mathrm{V}(x_2)$$
$$+\frac{(x_1-x_3)(3x_2-x_1-2x_3)}{(x_3-x_2)}\mathrm{V}(x_3)]$$
$$=\frac{1}{6}[W_1V(x_1)+W_2V(x_2)+W_3V(x_3)]$$

②梯形积分公式

$$\int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} \mathrm{V}(x)dx=\frac{X_{2n}-X_{2n-1}}{2}\left[V(x_{2n})+V(x_{2n-1})\right] \tag{7-6-11}$$

在求出 X、Y 两个方向的数值积分后，便可求得整个异常源对计算点的作用值 V_Z，……，V_{YY}，将作用值代入相应的位场公式则可求得磁场值。

三、人机交互反演在计算机上实现

在 Windows 环境下，用 Visual C 语言，OpenGL 函数实现人机交互反演过程。可视化界面在图形显示上有三种模式（如图 7-6-6，7-6-7）：活动截面平面模式（可编辑状态）、三维断面排列模式以及三维立体显示模式，通过切换按钮进行切换显示。在模型编辑上提供了添加（删除、移动）地质体、添加（删除、移动）地质体截面、修改地质体物性参数、添加（删除、移动）地质体截面角点、图形缩放、图形平移滚动、勘探线与测网相对位置预览、读写地质模型等功能，可以实现可视化反演过程中的所有操作。其步骤如下：

（1）对磁测资料进行预处理；

（2）根据磁测资料的特征，结合地质及钻孔资料，给出定性分析和初步解释；

（3）建立 3D 模型。将已知的地质（矿）体、围岩、接触带、钻孔等信息矢量化，根据定性分析的结果在各剖面中添加推断地质（矿）体，并可以通过任意拖动、增加、删除角点来实现地质（矿）体形态的改变，同时地质（矿）体的属性（如：地质体走向的延伸长度、磁化强度、地磁倾角、颜色、标注等等）也可以根据实际情况改变；

（4）通过修改各剖面地质体的形态、位置、磁性参数等来拟合磁异常曲线，当拟合误差达到精度要求后，得到最终的反演结果。

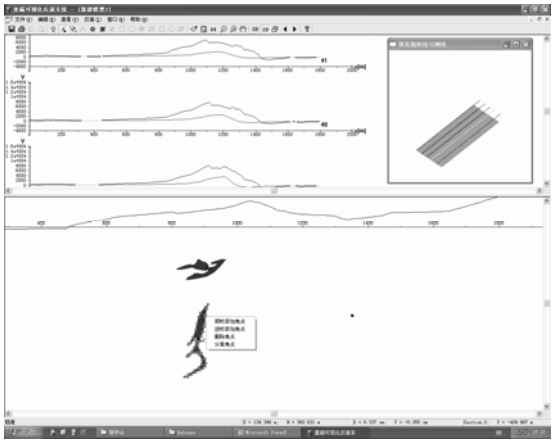


图 7-6-6　三维可视化模型编辑主界面

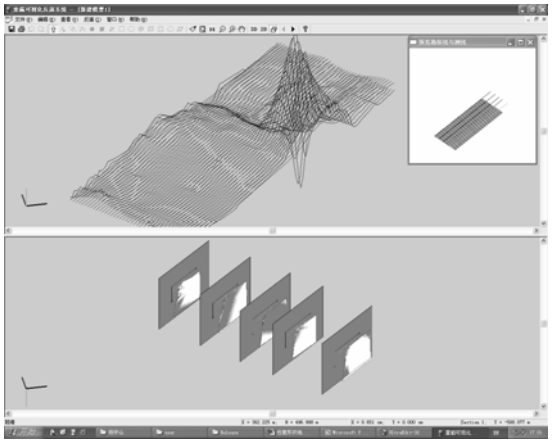


图 7-6-7　三维可视化模型断面排列显示模式

*第七节 磁化率与磁化强度成像方法

磁化率、磁化强度成像方法是一种物性反演方法，它将地下介质划分为多层多块网格状的磁性体模型，在空间域建立目标函数用最优化反演方法求解，从而得到地下介质磁性分布，类似于视电阻率概念，通过该方法得到的结果称为视磁化率或视磁化强度。

磁异常是由地下磁性体在地磁场的作用下引起的，而地下介质是连续分布的，地下空间中的磁性体可视为由一系列较高或者较低磁化率块体组成的磁异常区域。根据地面观测的磁异常反演地下磁性体分布时，可将观测区域地下空间介质划分为一系列块体单元（2D 反演将划分为矩形截面的无限长棱柱体），当块体单元足够小时，假设每个块体单元内部磁化率均匀分布，允许不同块体单元具有不同的磁化率。根据位场理论，当不考虑剩磁和退磁影响时，磁化率均匀的块体单元所产生的磁异常与磁化率成正比，比例系数仅仅与块体单元形状及空间坐标有关。当块体单元大小位置固定时，比例系数可以预先确定出来，在反演过程中，磁化率值是唯一描述地质体的参数，也是唯一需要反演的参数。这样，根据磁异常反演场源体的问题就变成了反演磁化率的地下分布问题，称为视磁化率成像法。

一、方法原理

（一）正演计算

如图 7-7-1 所示进行网格剖分，将地下空间划分为致密排列的二度矩形截面棱柱体单元，每个二度矩形截面棱柱体正演公式为板状体倾角为 90° 的二度板状体正演公式。

总磁化强度 M、有效磁化强度 Ms 和磁化率 κ 有如下关系：

$$Ms = M\sqrt{\cos^2 I \cos^2 A + \sin^2 I}$$

$$B_0 = \mu_0 H_0 \,,\quad M = kH_0 \quad,\quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

$$M = \frac{B_0}{\mu_0} k \text{ 或 } \quad k = \frac{\mu_0}{B_0} M$$

其中，B_0 为地磁场强度，μ_0 为真空磁化强度，A 为测线磁方位角，I 为地磁倾角或总磁化强度倾角。即当不考虑剩磁时，磁化强度与磁化率是正比例关系，比例系数仅与地磁场强度有关。因此，通常是直接求解磁化强度而非磁化率。

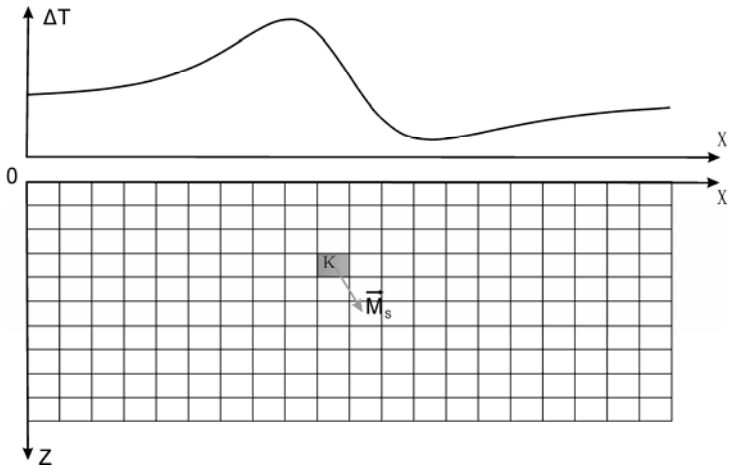


图 7-7-1 磁化率成像模型

假设单元总数为 N，每一个棱柱体单元内的磁化率分布均匀，测线上有 M 个观测点。那么，第 j 个棱柱体单元在第 i 个观测点的磁异常为

$$\Delta T_{ij} = G_{ij}\kappa_j$$

式中，κ_j 表示第 j 个棱柱体单元的磁化率；G_{ij} 表示单位大小的磁化率的第 j 个棱柱体单元网格在第 i 个观测测点的产生的异常，由正演公式可以求出。根据位场叠加原理，第 i 个观测点的磁异常 ΔT_i 是地下全部 N 个棱柱体单元在该点处的磁异常之和，即

$$\Delta T_i = \sum_{j=1}^{N} \Delta T_{ij} = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}\kappa_j$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \\ \vdots \\ \Delta T_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ G_{M1} & \cdots & \cdots & G_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_N \end{bmatrix}$$

即

$$\Delta T = G\kappa$$

上式中，ΔT 为 M×1 维向量，表示 M 个观测点上的磁异常；κ 为 N×1 维向量，表示 N 个棱柱体单元的磁化率；G 为 M×N 维矩阵，称为核矩阵。

（二）预优共轭梯度法反演

对于磁化率反演成像问题最终归结为求解线性方程组

$$Gm = d \qquad (7\text{-}7\text{-}1)$$

的求解问题。通常，观测数据的个数远远小于地下模型参数的个数，即 M<<N ，因此，方程（7-7-1）是欠定的，没有常规意义下的解，其最小方差解等价于求解方程

$$G^T Gm = G^T d$$

即

$$Am = b \qquad (7\text{-}7\text{-}2)$$

其中，A 为 N 阶对称正定矩阵，b 为 N 维向量，m 为未知的 N 维向量。而求解以上方程组等价于求解二次泛函

$$\phi(m) = \frac{1}{2} m^T Am - b^T m$$

的极小点。因此，可以运用泛函的 $\phi(m)$ 二次终止性，沿共轭梯度方向搜索可快速的求出极小值点,即原方程组的解。这种方法称之为共轭梯度法。

当模型参数个数 N 较大时，迭代次数应保持尽可能小，可能增加了难度。反演的收敛速度受系数矩阵的条件数控制，对于密度成像反演来说，系数矩阵的条件数相当大，影响共轭梯度算法的收敛。为避免迭代次数太大，提高共轭梯度法的收敛速度，VanDecar 和 Snieder（1994）提出采用预优矩阵改善方程组条件数，并导出求解类似方程组的预优共轭梯度算法。

VanDecar 和 Snieder（1994）修改方程组（7-7-2）为

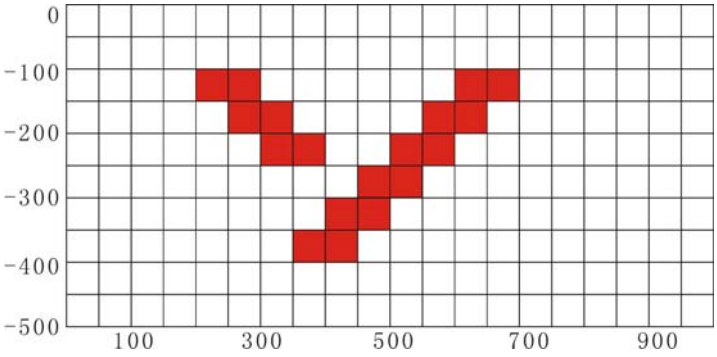
$$PA^T A\Delta m = PA^T \Delta b$$

式中，P 为预优矩阵，近似等于 $(A^TA)^{-1}$，即 $P(A^TA)^{-1}\approx I$（I 为单位阵）。因为 $P(A^TA)$ 的奇异值集中分布在对角线上，而且都非常接近 1，可见，预优矩阵可以改善方程组的条件数。这种方法称为预优共轭梯度法，简称 PCG（Preconditioned Conjugate Gradient）法。预优共轭梯度法是求解大型线性方程组的有效方法，通过合理选取一个预优矩阵 P，使得核函数的特征值集中分布，提高了收敛速度,从而在地球物理反演中得到了广泛应用。

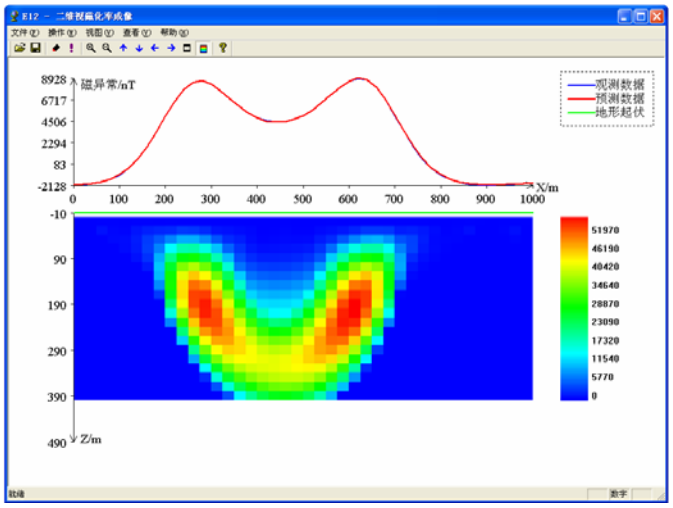
在磁化率成像反演中，通常磁化率分布集中于地表附近，而不是按照磁性体的真实深度合理分布的，这类似于电法中的“趋肤效应”。这是由于构造模型的核函数是线性的，重磁异常值与场源到观测点的距离呈指数衰减，导致核矩阵中数值随深度增加而急剧减小，相同的棱柱体单元，深部的异常响应比浅部的要弱得多，对观测数据的贡献相对很小，故容易出现“趋肤效应”。为减小“趋肤效应”，可以进行深度加权，简单可靠的预优矩阵 $P=z^3I$，z 为块体单元中心埋深，I 为单位阵。Pilkington（1997）利用该预优矩阵进行 3D 磁化率成像，得到了比较理想的结果。

二、理论模型

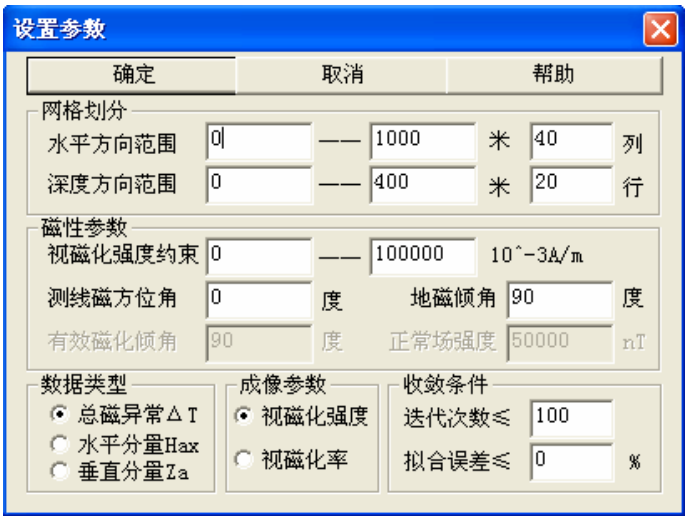
如图 7-7-2（a）所示的是磁性体理论模型，总磁化强度为 100000×10^{-3}A/m，地磁倾角 I=45°，测线方位角 A=0°，磁化强度成像结果如图 7-7-2（b）下部所示，拟合结果见图 7-7-2（b）上部，如图 7-7-2（c）是软件输入参数的对话框。



(a) 磁性体理论模型



(b) 磁化强度成像结果



(c) 输入参数的对话框

图 7-7-2 磁化率成像反演

*第八节 磁性界面快速反演方法

一、重磁界面异常的正演

在重磁界面反演中，常常把重磁界面划分成大量的离散的二度水平棱柱体或三度直立棱柱体组合模型，由于未知参数太多不能采用直接解法，往往只能采用迭代法或其它方法。Parker（1972,1973,1974）采用了连续模型，提出了频率域重磁位场正反演的理论公式，Oldenburg（1974）把它推广成迭代形式并做了二维计算。由于引入快速富里叶变换，在相同精度下，Parker 算法比离散模型的算法至少要快一个数量级以上。因此，Parker 法成为重磁异常定量计算中的有力工具，可用于油气田勘探中研究基底构造的起伏变化及区域重磁资料反演解释。

（一）重磁界面异常的正演

如图 7-8-1 所示的密度或磁性界面，其上下界面密度差为 σ，磁化强度差为 $\boldsymbol{M}$，为简单起见，设 $\boldsymbol{M}$ 垂直向下，界面下一体积元 dv 在观测点 $P(x,y,z)$ 产生的引力位为

$$dV = f\sigma \frac{dv}{\left[(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{1/2}} \tag{7-8-1}$$

其中 f 为万有引力常数（第五章万有引力常数符号用 G,这里为了区别核函数矩阵改用 f ）。

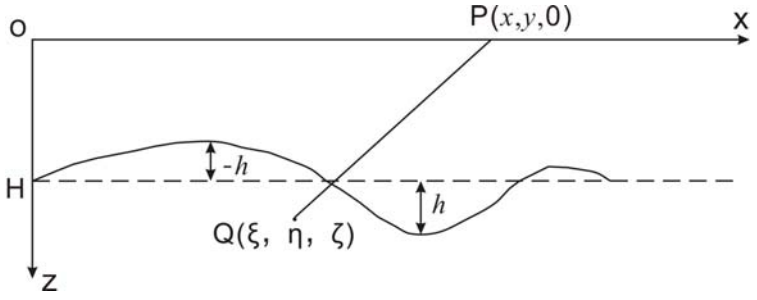


图 7-8-1 重磁界面示意图

而体积元 dv 在 $P(x,y,z)$ 点产生的引力场强度 $d\Delta g$ 为

$$d\Delta g(x,y,z)=\frac{\partial V}{\partial z}=f\sigma\frac{-(z-\zeta)}{\left[(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}dv \tag{7-8-2}$$

若 $P(x,y,z)$ 点在地面，则有

$$d\Delta g(x,y,0)=f\sigma\frac{\zeta}{\left[(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2\right]^{3/2}}dv \tag{7-8-3}$$

把上式简记为

$$d\Delta g=f\sigma G dv \tag{7-8-4}$$

其中 $G=\dfrac{\zeta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2\right]^{3/2}}$ 是与观测点及场源点坐标有关的函数，称为核函数。

利用表示重磁位之间关系的泊松公式

$$U=-\frac{1}{4\pi G\sigma}\boldsymbol{M}\cdot grad_p V$$

式中 U_p, V 分别表示磁位和重力位，则有

$$\Delta Z=-\mu_0\frac{\partial U_P}{\partial z}=\frac{\mu_0}{4\pi G\sigma}(M_x V_{xz}+M_y V_{yz}+M_z V_{zz})$$

当垂直磁化时

$$\Delta Z_{\perp}=\frac{M_Z}{f\sigma}\cdot\frac{\partial\Delta g}{\partial z}$$

$\Delta Z_{\perp}$ 记为 ΔZ，M_Z 记为 M，并注意到对 P 点的微分与对 Q 点的微分相差一负号，即 $\dfrac{\partial}{\partial z}=-\dfrac{\partial}{\partial\zeta}$，对于一体积元有

$$d\Delta Z=\frac{M}{f\sigma}\cdot\frac{\partial\Delta g}{\partial z}dv$$

$$=M\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\cdot\frac{\zeta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2\right]^{3/2}}dv$$

$$=M\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial\zeta}G\right)dv$$

记为

$$d\Delta Z=M\cdot T\cdot dv \tag{7-8-5}$$

其中

$$T=-\frac{\partial G}{\partial\zeta}$$

设界面的平均深度为 H，将核函数 G 在 $\zeta = H$ 处用泰勒级数展开：

$$G(x-\xi, y-\eta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(x-\xi, y-\eta, H)}{n!} \cdot (\zeta - H)^n$$

式中，$G(n)(x-\xi, y-\eta, H)$ 是在 $\zeta = H$ 处 G 对 ζ 的 n 阶导数。将 G 对 ζ 积分，从 $(H+h) \to H$，其中 h 是界面相对于平均深度 H 的距离，由于我们规定 Z 轴向下为正，所以在 $\zeta = H$ 以上 h 为负，而在其下为正，h 是 (ξ, η) 的函数，有

$$\begin{aligned}
\int_{H+h}^{H} G(x-\xi, y-\eta, \zeta) d\zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{H+h}^{h} \frac{G^{(n)}(x-\xi, y-\eta, H)}{n!} \cdot (\zeta - H)^n d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(x-\xi, y-\eta, H) \cdot \frac{1}{(n+1)!} (\zeta - H)^{n+1} \Big|_{H+h}^{h} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(x-\xi, y-\eta, H) \cdot \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1}(\zeta, \eta) \qquad (7\text{-}8\text{-}6) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} G^{(n-1)}(x-\xi, y-\eta, H) \cdot \frac{1}{n!} h^n(\zeta, \eta)
\end{aligned}$$

类似于上式的推导，有

$$\int_{H+h}^{H} T(x-\xi, y-\eta, \zeta) d\zeta = \int_{H+h}^{H} -\frac{\partial G}{\partial \zeta} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(x-\xi, y-\eta, H)}{n!} h^n(\xi, \eta) \qquad (7\text{-}8\text{-}7)$$

式(7-8-4)，(7-8-5)是对界面内体积元 dv 而言的，若对于整个界面，则有

$$\Delta g(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int f \sigma(\xi, \eta) \left(\int_{H+h}^{H} + \int_{H}^{\infty} \right) G(x-\xi, y-\eta, \zeta) d\xi d\zeta d\eta$$

$$\begin{aligned}
&= -f \int_{-\infty}^{\infty} \int \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{G^{(n-1)}(x-\xi, y-\eta, H)}{n!} h^n(\xi, \eta) \sigma(\xi, \eta) \right. \\
&\left. - \frac{\sigma(\xi, \eta)}{\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + H^2 \right]^{1/2}} \right] d\xi d\eta \qquad (7\text{-}8\text{-}8)
\end{aligned}$$

$$\Delta Z(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} M(\xi, \eta) \left(\int_{H+h}^{H} + \int_{H}^{\infty} \right) T(x-\xi, y-\eta, \zeta) d\xi d\zeta d\eta$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(x-\xi, y-\eta, H)}{n!} h^n(\xi, \eta) \cdot M(\xi, \eta) \right.$$

$$+\frac{H\cdot M(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H^2]^{3/2}}\Bigg]d\xi d\eta \tag{7-8-9}$$

注意到 $$\tilde{G}(x,y,H)=G(u,v)=2\pi e^{-HS} \tag{7-8-10}$$

式中 $S=(u^2+v^2)^{1/2}$ 为径向波数；

$$\tilde{G}^{(n)}(x,y,H)=G^{(n)}(u,v)=(-S)^n\cdot 2\pi e^{-HS} \tag{7-8-11}$$

核函数 G 的垂向积分

$$G^{(-1)}(x,y,H)=\frac{-1}{\left[(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2+H^2\right]^{1/2}}$$

$$\tilde{G}^{(-1)}(x,y,H)=G^{(-1)}(u,v)=2\pi e^{-HS}/(-S) \tag{7-8-12}$$

将式（7-8-11），式（7-8-12）代入式（7-8-8）：

$$\Delta g(u,v)=-f\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-S)^{n-1}\cdot 2\pi e^{-HS}}{n!}(\sigma\tilde{h}^n)+\frac{2\pi e^{-HS}\cdot\sigma}{(-S)}\right]$$

$$=-2\pi fe^{-HS}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-S)^{n-1}}{n!}(\sigma\tilde{h}^n)+\frac{\sigma}{(-S)}\right]$$

$$=-2\pi fe^{-HS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-S)^{n-1}}{n!}(\sigma\tilde{h}^n) \tag{7-8-13}$$

类似地，将式（7-8-10），式（7-8-11）代入式（7-8-9）得

$$\Delta Z(u,v)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-S)^n\cdot 2\pi e^{-HS}}{n!}(\tilde{h}^n)\cdot M+2\pi e^{-HS}\cdot M$$

若考虑 n=0 时，即泰勒展开式第一项在空间域为常数项，则有

$$\Delta Z(u,v)=2\pi e^{-HS}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-S)^n}{n!}(M\cdot\tilde{h}^n) \tag{7-8-14}$$

其中$(\sigma\tilde{h}^n)$为σ与函数h^n乘积的富氏变换，$(M\cdot\tilde{h}^n)$为M与函数h^n乘积的富氏变换。式（7-8-13），式（7-8-14）即为频率域中密度界面产生的重力异常和磁性界面产生的磁异常的正演公式。

当M,σ为常数时，$\Delta\tilde{g},\Delta\tilde{Z}$为：

$$\Delta g(u,v)=-2\pi f\sigma\left[e^{-HS}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-S)^{n-1}}{n!}\tilde{h}^n\right] \tag{7-8-15}$$

$$\Delta Z(u,v)=2\pi M\left[e^{-HS}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-S)^n}{n!}\tilde{h}^n\right] \tag{7-8-16}$$

若类似于前面的考虑，略去 n=0 项：

$$\Delta g(u,v) = -2\pi f\sigma\left[e^{-HS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-S)^{n-1}}{n!}\tilde{h}^n\right] \tag{7-8-15'}$$

$$\Delta Z(u,v) = 2\pi M\left[e^{-HS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-S)^{n}}{n!}\tilde{h}^n\right] \tag{7-8-16'}$$

这里推导的（7-8-15'），（7-8-16'）是取 Z 轴向下为正，并且规定在平均深度之上的起伏 $h<0$，平均深度之下的起伏 $h>0$，因此（7-8-10）中平均深度 $H>0$，$G(x,y,H)$ 的富里叶变换

$$\widetilde{G}(x,y,H) = G(u,v) = 2\pi e^{-HS}$$

通常，根据 Erdelyi（1954）积分变换表

$$\frac{-Z}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \to e^{2\pi(u^2+v^2)^{1/2}\cdot z} = e^{2\pi sz} \qquad Z\leqslant 0$$

H 即相当于-Z，二者相差一个负号，这样也就造成（7-8-11）式出现 $(-S)^n=(-1)^n S^n$，而不是 S^n。考虑式（7-8-15），式（7-8-16）中的 $\tilde{h}^n$，若我们规定 Z 轴向上，则在平均深度 H 之上的起伏 $h>0$,反之 $h<0$，这里 $\tilde{h}^n$ 实际上隐含了 $(-1)^n\tilde{h}^n$，如果同时考虑 $(-s)^n$ 中的 $(-1)^n$ 与 $\tilde{h}^n$ 中的 $(-1)^n$，那么式（7-8-16）就可以表示为

$$\Delta g(u,v) = -2\pi f\sigma\left[e^{-HS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{n-1}}{n!}\tilde{h}^n\right] \tag{7-8-17}$$

$$\Delta Z(u,v) = 2\pi M\left[e^{-HS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{n}}{n!}\tilde{h}^n\right] \tag{7-8-18}$$

这与 Parker 导出的公式完全一致。上式表示，当给定了平均深度 H 及平均深度上的起伏 $h(\xi,\eta)$，取泰勒展开式有限项数 $n=3\square 8$，就可以计算出 $\tilde{h}^n$ 和 $\Delta g(u,v)$，利用快速富里叶变换即可得到空间域的重磁异常值 $\Delta g(x,y,0)$ 与 $\Delta Z(x,y,0)$。

二、重磁界面异常的反演

式(7-8-15')，式(7-8-16')是重磁界面正演计算公式，稍做一下变化，就可以当作反演迭代公式。我们把和式中 n=1 的项写出并移项得：

$$\tilde{h} = \frac{e^{HS}}{-2\pi f\sigma}\Delta\tilde{g} + \sum_{n=2}^{\infty}(\tilde{h}^n)\cdot\frac{(-S)^{n-1}}{n!} \tag{7-8-19}$$

$$\tilde{h}=\frac{e^{HS}}{-2\pi MS}\Delta\tilde{Z}+\sum_{n=2}^{\infty}(\tilde{h}^{n})\cdot\frac{(-S)^{n-1}}{n!} \tag{7-8-20}$$

若令等式右端的 h 值为第 i 次近似值，而等式左端的 h 为第（i+1）次近似值，即为 Parker 提出的迭代反演公式：

$$\tilde{h}^{i+1}=\frac{e^{HS}}{-2\pi f\sigma}\Delta\tilde{g}+\sum_{n=2}^{\infty}(\tilde{h}(i)^{n})\cdot\frac{(-S)^{n-1}}{n!} \tag{7-8-21}$$

$$\tilde{h}^{i+1}=\frac{e^{HS}}{-2\pi MS}\Delta\tilde{Z}+\sum_{n=2}^{\infty}(\tilde{h}(i)^{n})\cdot\frac{(-S)^{n-1}}{n!} \tag{7-8-22}$$

实践证明，这种迭代方式每次求的是 h 值，而不是 h 的修正量 Δh，不容易保证迭代收敛。可以采用另一种迭代方式。其步骤如下：

（1）我们取(7-8-21)，(7-8-22)式的一级近似值，或者理解为初值 $h^{(0)}$ 等于零：

$$\tilde{h}^{(1)}=\frac{e^{HS}}{-2\pi f\sigma}\Delta\tilde{g} \tag{7-8-23}$$

$$\tilde{h}^{(1)}=\frac{e^{HS}}{-2\pi MS}\Delta\tilde{Z} \tag{7-8-24}$$

其中 $\tilde{h}^{(1)}$ 表示 h 的一级近似值 $h^{(1)}$ 的频谱。

（2）把一级近似值 $\tilde{h}^{(1)}$ 代入式(7-8-15')、式(7-8-16')得：

$$\Delta\tilde{g}^{(1)}=-2\pi f\sigma\left[e^{-HS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-S)^{n-1}}{n!}\tilde{h}^{(1)n}\right] \tag{7-8-25}$$

$$\Delta\tilde{Z}^{(1)}=-2\pi MS\left[e^{-HS}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-S)^{n-1}}{n!}(\tilde{h}^{(1)n})\right] \tag{7-8-26}$$

（3）把 $\Delta\tilde{g}^{(1)},\Delta\tilde{Z}^{(1)}$ 按下式求 $\tilde{h}^{(2)}$：

$$\tilde{h}^{(2)}=\frac{e^{HS}}{-2\pi f\sigma}\left[\Delta\tilde{g}-\Delta\tilde{g}^{(1)}\right] \tag{7-8-27}$$

$$\tilde{h}^{(2)}=\frac{e^{HS}}{-2\pi MS}\left[\Delta\tilde{Z}-\Delta\tilde{Z}^{(1)}\right] \tag{7-8-28}$$

（4）把 $\tilde{h}^{(2)}$ 反变换求得 $h^{(2)}$，则 $h^{(1)}+h^{(2)}$ 为 h 的二次近似值，把它代入式(7-8-15')、式(7-8-16')求得 $\Delta\tilde{g},\Delta\tilde{Z}$ 的二级近似值 $\Delta\tilde{g}^{(2)},\Delta\tilde{Z}^{(2)}$。

（5）按下式求 $\tilde{h}^{(3)}$：

$$\tilde{h}^{(3)} = \frac{e^{HS}}{-2\pi f\sigma}\left[\Delta\tilde{g} - \Delta\tilde{g}^{(2)}\right] \tag{7-8-29}$$

$$\tilde{h}^{(3)} = \frac{e^{HS}}{-2\pi MS}\left[\Delta\tilde{Z} - \Delta\tilde{Z}^{(2)}\right] \tag{7-8-30}$$

则 $h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)}$ 为 h 的三级近似值，再继续求 $\Delta\tilde{g}^{(3)}, \Delta\tilde{Z}^{(3)}$，……，如此下去，直到 h 的第 n 次近似值与第 $(n-1)$ 次近似值之差满足所要求的精度为止。这时得到的界面起伏为

$$h = \sum_{j=1}^{n} h^{(i)} \tag{7-8-31}$$

用图 7-8-2a 反映的异常作为反演观测值，其数据包含 36 条线，每条线 30 个点，点、线距均为 10km，界面平均深度 5km，磁化强度 50×10^{-3}A / m ，线数、点数扩展幂分别为 7 和 6，迭代次数为 2，圆滑因子为 20，反演结果见图 7-8-2b。

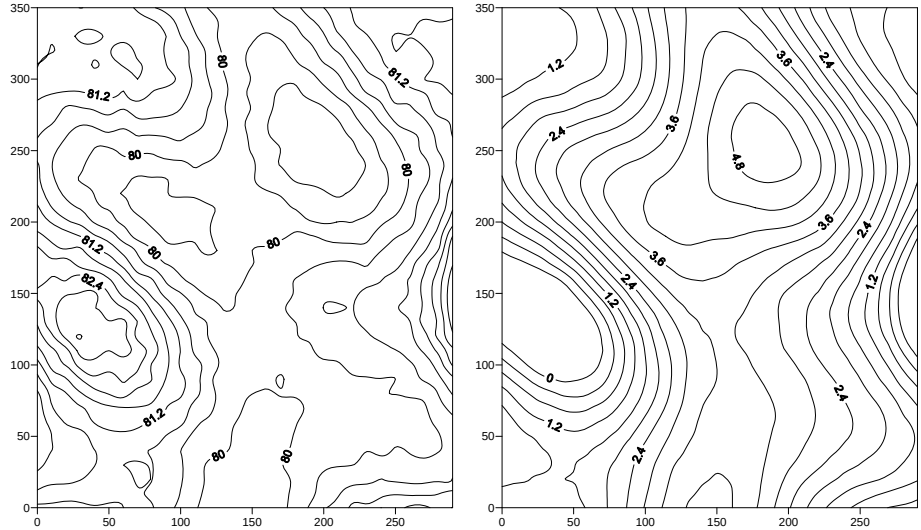


图 7-8-2 帕克法磁性界面反演

(a、观测值； b、帕克法反演得到的界面深度)

习 题

1、什么是磁异常反演的多解性？请举例说明。

2、试分析克服磁异常反演的多解性的措施？

3、简述切线法、特征点法的应用条件及优缺点。

4、请归纳磁异常反演方法的原理、模型及算法，并讨论它们的异同点。

发展趋势与本章参考文献

2D、3D 物性反演（磁化率、磁化强度成像）是近年研究的热点之一，克服趋肤效应提

高成像的效果，以及 3D 物性反演方法的实际应用是该方法的主要研究方向；井地磁测多分量资料联合反演目前采用的方法主要有人机交互、成像与非线性反演方法；地面多分量（X,Y,Z,梯度及张量）联合反演是磁测资料反演理论研究的另一个重点；非线性反演方法近年又有新的发展，群智能算法如粒子群算法，蚁群算法等在磁测资料反演中得到应用。在反演中考虑剩磁、退磁影响也得到关注。

参考文献

1. 谭承泽，郭绍雍等：磁法勘探教程，地质出版社，1984
2. 管志宁 地磁场与磁力勘探，地质出版社，2005
3. 罗孝宽，郭绍雍等：应用地球物理教程—重力 磁法，地质出版社，1991
4. 武汉地质学院、成都地质学院、河北地质学院、合肥工大合编：应用地球物理学—磁法教程，地质出版社，1980
5. 姚姚等，地球物理反演基本理论与应用方法，中国地质大学出版社，2002
6. 长春地质学院磁法教研室：磁法勘探，地质出版社，1979
7. 董焕成 磁法勘探教程，地质出版社，1993
8. 周熙襄，钟本善等，地球物理反问题中的最优化方法，地质出版社，1980
9. 杨文采.地球物理反演的理论与方法.北京:地质出版社.1997.
10. 王家映.地球物理反演理论.北京:高等教育出版社,1998.
11. 朱文孝，屠万生，刘天佑，重磁资料电算处理与解释方法，武汉，中国地质大学出版社，1989
12. 刘天佑.重磁异常反演理论与方法.武汉:中国地质大学出版社, 1992.
13. 刘天佑，位场勘探数据处理新方法.北京:科学出版社,2007.
14. 史辉，刘天佑，利用欧拉反褶积法估计二度磁性体深度与位置，物探与化探，2005，29（3）：230-233
15. Yaoguo Li and Douglas W. Oldenburg. Joint inversion of surface and three-component borehole magnetic data[J]. Geophysics, 2000, 65(2):540-552.
16. O., Boulanger, M. Chouteau. Constraints in 3D gravity inversion. Geophysics Prospecting, , 2001,49, 265-280.
17. 张世晖.海洋卫星测高重力数据处理方法研究及在冲绳海槽的应用[博士论文],中国地质大学（武汉）,2003.
18. 林振民，陈少强，计算机上的橡皮膜技术.物探化探计算技术, 1996,18(1):6- 16.
19. 吴文鹏，管志宁，基于八叉树结构的可视化三维位场正反演.物探与化探,1997,21(4):282- 288.
20. 刘天佑，,刘大为，詹应林等，磁测资料处理新方法及在危机矿山挖潜中的应用.物探与化探.2006,30(5):377~390.
21. 魏伟，吴招才，刘天佑，基于 AutoCAD 平台三维可视化规则几何形体磁场反演，工程地球物理学报，2006，3（1）：54-59
22. 杨宇山，刘天佑，李媛媛，任意形状地质体数值积分法重磁场三维可视化反演，地质与勘探，2006，42（5）：79-83
23. 张大莲,刘双,陶德益,等.井中磁测与地面磁测资料联合反演.工程地球物理学报,2008,5(1): 60- 64.
24. 刘双,张大莲,刘天佑,等.井地磁测资料联合反演及应用,地质与勘探,2008,44(6): 69- 72.